Johannis Wallisii, SS. Th. D.

GEOMETRIÆ PROFESSORIS

SAVILIANI in Celeberrimâ

Academia OXONIENSI,

OPERUM

MATHEMATICORUM

Pars Altera:

Qua Continentur

- De Angulo Contactus & Semicirculi, Disquisitio Geometrica.
- De Sectionibus Conicis Tractatus.
- Arithmetica Infinitorum: sive de Curvilineorum quadraturâ, &c.
- Ecclipseos Solaris Observatio.



OXONII,

Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,

Impensis THO. ROBINSON. *Anno* 1656.

AD LECTOREM.



NOn multa ſunt (Erudite Lector) quibus te in limine morabor. Statueram apud me, cum his quos habes, tractatus alios aliquot emiſiſſe; adeoq; huic parti aliam vel conjunxiſſe vel potius præmiſiſſe; quam quidem eodem circitèr tempore inceperant Typographi quo præſentem. Sed cum viderim operarum moras majores eſſe quam ſperaveram, mallem (amicis id deſiderantibus) hanc quam abſolverant partem in anteceſſum emittere; quam ſecutura eſt altera cumprimum per Typographos licebit. Interim, his fruere: quibus, ſi Arithmeticæ (ut loquuntur) Speciosæ, ſeu Symbolicæ, aſſuetus ſis, haud (ſpero) admodum hærebis, cum ego omnia qua potui perſpicuitate tradere ſim conatus; ſin ea adhuc carueris, poteris vel ex Oughtredi *Clavi Mathematicæ*, vel Schotenii *Principiis Matheſeos Univerſalis*, eam tibi familiarem reddere; vel, niſi prius id feceris, ex iis quæ nos brevi (favente Deo) ſumus edituri.

Errores quod attinet Typographicos, ſunt quidem illi (ſi inſuetum Typographis noſtris operis genus, & calculi multiplicitatem, ſpectes) non adeo multi, nec quidem plures (fortaſſe etiam pauciores) quam in minoris difficultatis libris ſolent occurrere; quos obſervavimus tamen, qui alicujus ſint momenti, notare mallem quam (quod ſolent multi) diſſimulare; ut eos (& ſiquos alios ipſe deprehenderis) calamo emendes.

Ang: Contact: p. 15. l. 16. *Geometricè* p 30 l: 1 *Si enim peripheria EA*, p 32 l: 15 *planæ*: p 45 l: ult: *BCA, BA.* p 48 l 29 *tamen*, p 50 l 7 *puncto P.*

Con: Sect: p 23 marg: *non ſep-* p 32 l 23 *anſam*, p 38 l 7 *ld* — p 40 l 1 *hujus*, p 52 l 17 $\frac{4d^2 \pm 4da + a^2}{4d^2} p^2 - \frac{d \pm a}{d} p^2$. p 53 l 19 *αF*, p 54 l pen: *rectam.* p 55 l 12 *PF.Pα::* p 59 l 8 *quotlibet*, p 64 l pen: $t = \frac{d^2 l}{dl - e^2}$ p 66 l 11 *a centro* p 68 l ult: *tranſverſæ*, p 69 l 22 $t - d \mp a$, p 71 l 27 *Aa*, p 73 l 3

c.d::x, l pen: $\pm 2\tau\gamma dxcq$, p 74 l ult: $\frac{\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma}$, p 75 l 1 $\pm\delta\xi^{2}$ $\pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}$ l 5, $e^{2} = DOq$, p 75 l 15 *sunt et*, p 83 l 8 d^{2}: *Horum*, l 19 $t = \frac{d^{2}l}{b^{2} - dl}$, p 86 l 13 $f^{2}a^{2} \pm f^{2}ta$, l 14 $\pm f^{2}a + f^{2}t$, p 87 l 4 HA.HF, p 91 l $\delta^{2}c^{2}$, l 4 $2\sigma + \delta = \zeta$, ib $\pm 2\tau\gamma cq$, p 92 l 16 DA<Dλ, l 18 $\frac{\gamma dz}{\sigma c}$, l 19 $\sqrt{\delta\zeta dz}$, l 20 $\pm 2\gamma c\sqrt{}$, p 93 l 1 $\delta\zeta^{2}$ $\pm 2\gamma c\sqrt{}$, l 4 *sunt pun-* l 12 *hyper-* l 24, 25 CHα p 94 l 4 *prop*: 32, p 103 l 21 *supponuntur*, p 106 l 21 $3f^{2}da +$, p 109 l 21 $\pm pD$, l 29,30, $9dq^{2}$, p 111 l 24 *est Diam*.

Arithm: Infin: p 16 l 15 *maximæ*; l 23 l^{2}, l 26 *subtriplam*, p 23 marg: *prop*: 24, p 27 l 26 *vero continentia*, p 33 l 26 *maximæ*, p 34 l 27 *primo* 0, *secundo* 1, lin 29 $+ \frac{n}{12\,l^{2}}l^{5}$, lin: 30 $- \frac{1}{12}nl^{2}$, p 35 l 8 *prop*. 182, p 36 l 15 *seriem*, p 38 l 19 *habeat*, p 49 l 5 *pyramidoidea*, p 70 l 16 *divisor*, p 77 l 18 ADβ, lin: ult: *huic*, p 78 l pen: *radicum*, p 79 l 22 *subsecundanis*, p 83 l 6 *acuto*, p 87 l 20 $1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$, p 89 l ult: *vel* $\frac{2}{3}$, p 91 l 14 $R^{2} + 2aR + a^{2}$, l 22 dele *prop*: 121, p 93 l ult: a^{2}, p 93 l 3 ADβ p 97 tab: l 1, 120, l 3, 58240, l 4, 9945, l 5 1056, p 98 l 6 $\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a} \times \frac{3a+1}{3a}$, p 99 tab: l 3, 29160, l 4, 45, & 122880, p 100 l 9 + + + + + +, p 103 tab: l 3, 1 + 3, l 4, 1 + 4, p 107 l 15, $2aD + a^{2}$, l 17 $+ a^{4}$ & $- a^{6}$, l 25 *maximo*, p 108 l 8 *lipsem*, l 15 $4aD - 16a^{2}$, l 19 *ductam*, p 112 l 14 *rectas Trianguli inscripti*, l 7 $\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8}{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13}$ p 113 l 4, $- \frac{1}{13} = \frac{81}{1820}$ AD^{12}, l 5, $4 \times 7 \times 10 \times 13$, p 114 tab: l ult, $4 \times 11 \times 18 \times 25$, p 118 l 18, $\frac{2}{3} - \frac{2}{5}$, p 124 l 17, $+ \frac{3}{5} + \frac{1}{7}$, p 125, l 5 $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, l 15, $+ \frac{9}{5} + \frac{3}{6}$, p 127 l 16, $\frac{1}{2}$ ADT $\times \frac{1}{3}$ AD^{2}, p 129 l 8 *habeat*, p 131 l 13, $10\sqrt{3}$, p 132 l 5,6, *ad* 7×6, p 133 l ult: $\frac{1}{6}$, p 136 l 31 *qui in secunda, laterales; qui in tertia*, p 147 l 16 *triangularium*, p 148 l 2, 720, p 152 l 32, $\frac{1}{\infty}$ B, *erit*, p 162 tab: l ult: 15, 23, & 70, p 163 l 1 *expeditius*, p 165 l 15 *meminimus, nempe*, p 177 l 27 *calcatos*, p 184 l 1, $4Fq + 8F$, lin: 7, 649 Fq.

Johannis Wallisii, SS. Th. D.

GEOMETRIÆ PROFESSORIS

SAVILIANI in Celeberrimâ

Academia OXONIENSI,

DE

ANGULO CONTACTUS

ET SEMICIRCULI

Disquisitio Geometrica.



OXONII,

Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,

Impensis THO: ROBINSON. *Anno* 1656.







Insignissimis Viris

D. BENJAMINO WHICHCOTO, S. T. D. Collegii Regalis Cantabrigiæ Præposito;

D. THOMÆ HORTONO, S. T. D. Collegii Reginalis ibidem Præsidi;

D. ANTHONIO BURGESIO, Rectori Ecclesiæ *Suttonensis* in Agro *Warwicensi*.

JOHANNES WALLIS *Geom. Prof.* *SAVILIANUS* Oxoniæ. S.



Um, supremo sic favente Numine, (Insignissimi Viri) prima studiorum Academicorum principia me posuisse contigerit in florentissimo Collegio, Emanuelis *dicto*, Cantabrigiæ, *cui vos Consocii (cum aliis dignissimis doctissimisq; Viris) regendo tunc temporis præfuistis; & quidem sub vestra omnium successive peculiari tutela; istius ego & loci & temporis & personarum mihi omnino recordandum esse censeo: (Quippe ingrati ratus, unde & a quibus quis profecerit, oblivisci:) Adeoq; hoc opusculum, utut exiguum, grati tamen animi testimonium, vestris inscribendum nominibus.*

Quam felix prosperumq; hactenus fuerit Emanuelis *illud Collegium, ab Honoratissimo Equite* GUALTERO MILDMAIO *prudentissimo piissimoq; Viro* (ELIZABETHÆ, *tunc Angliæ Reginæ, a Privatis Consiliis,) annis abhinc septuaginta circiter, feliciter & auspicato fundatum; non est quod ego, vestris præsertim auribus, multis exponam. Id saltem ausim dicere, (quod*

nec

nec quemquam negaturum autumo,) vix ullum utriusvis Academiæ Collegium, pari tempore, majori tum pietate tum doctrina floruisse, pluresve in messem Dei fideles seduloſq; operarios immisisse; indeq; haud facile est dictu, quanta Deo seges accreverit, quantum pietatis efficacis incrementum. Argumento esse potest nuperus Theologorum Conventus Westmonasteriensis, authoritate Parliamenti ex variis Angliæ partibus undicunq; convocatus, doctissimis, prudentissimis, & vere piis Theologis refertissimus, (qualem ego, nescio numquis alius, si doctrinam pariter & conjunctam pietatem spectemus, nec similem unquam vidi, nescio an visurus;) quorum præterpropter pars tertia ex hoc uno Collegio aliquando prodierant; quippe, ex centum circiter Theologis, plures quam triginta Emanuelis *fuerant Collegio enutriti cum tamen Collegiorum & Aularum utriusq; Academiæ numerus quadragenarium superet. Simili argumento est, quod, præter ingentem eruditorum numerum, hinc, tanquam ex refertissimo alveario, ad curas partim pastorales, partim ad alia utriusq; Academiæ Collegia, promotionis ergô, abunde transmissorum, etiam nunc temporis (Anno* 1655 *currente) ex sexdecim totidem Collegiorum Ædiumve Præfectis* Cantabrigiæ, *undecim ex hoc uno* Emanuelis *Collegio prodierunt. Quæ omnia nonnisi peculiari Numinis benedictioni in fundationem illam sincero animo positam referenda sunt, cum non alias huic adsint præ Collegiis aliis incitamenta ulla vel emolumenta, quibus illa videantur attribuenda. Cæterum Deus Optimus Maximus & florentissimam illam societatem, (cujus vos olim pars fuistis, & etiamnum estis ornamenta,) & vos item, vestraq; omnia feliciter sospitet, promoveatq;, in suam ipsius gloriam, vestrum ipsorum commodum, & totius Ecclesiæ incrementum.*



De Angulo Contactûs, & Semicirculi, Disquisitio Geometrica.

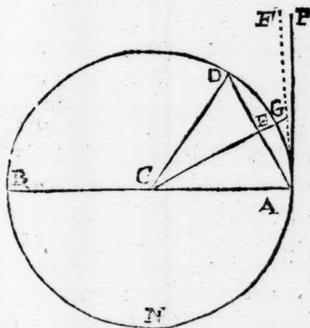
C A P. I.

Ansa & status Controversiæ.

QUoniam illi, quæ sequitur, Controversiæ ansam dedit Propositio 16a Libri 3i Euclidis; illam integram primùm apponendam duxi, ejusq; demonstrationis summam.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται· καὶ ἡ μὲν ἡμικυκλίου γωνία, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

"Quæ circuli diametro (AB) ad angulos rectos ab extre-
" mitate ducitur recta (A P)
" cadit extra circulum. 2. Et
" in locum qui inter rectam
" (A P) & peripheriam
" (DEA) interjicitur, altera
" recta (ut FA) non cadet:
" 3. Et Semicirculi angulus
" (EAC) major est omni
" angulo acuto rectilineo:
" 4. Reliquus autem (EAP)
" minor.



"Nam 1o si caderet per-
" pendicularis illa intra cir-
" culum, ut AD (vel etiam
" si jaceret in ipsa periphe-
" riâ) essent anguli DAC,
" ADC, æquales, per 5e1, ideoq; uterq; rectus; contra 17e1.
" 2o Si recta FA (inter peripheriam & perpendicularem PA)

B cadere

" cadere possit, ducatur ad illam perpendicularis ex centro
" CEG; quoniam igitur angulus rectus CGA major est acuto
" CAF (ut qui pars est recti CAP,) esset, per 19 e 1, latus CG
" minus quam C A, hoc est, minus quam C E, pars sui. Pars
" 3ª & 4ª sequuntur ex secundâ.

Occasione sumpta ab hac Euclidis Propositione, gravis orta est controversia (quod mirum est, in re pure Geometrica,) inter Peletarium & Clavium; quæ, quod sciam, nondum unanimi Mathematicorum consensu determinationem nacta est.

Primus, quod sciam, Peletarius asseruit, *Angulum* qui dicitur *Contactus*, seu contingentiæ, non esse revera *Angulum*, nec omnino *Quantitatem*; sed Rectam, quæ Circulum tangit, cum Peripheria coincidere, non autem ad illam inclinari; Angulum autem Semicirculi omnino Rectum esse, & recto rectilineo æqualem.

Contra, Clavius asserit, illum vere Angulum esse, & quidem quantitatem in infinitum divisibilem, non quidem per lineam rectam, at saltem per Peripheriam majoris circuli; minorem tamen quàm est ullus rectilineus possibilis: Angulum verò Semicirculi minorem esse angulo recto rectilineo, majorem tamen quovis rectilineo acuto.

CAP. II.

Controversiam hanc ab Euclide diremptam non esse.

ILLud autem ego primum præmonendum esse judico: Controversiam hanc ab Euclide diremptam non esse, (quanquam ex illius principiis dirimi posse non dubitem.) Probat enim Euclides, & recte quidem, Angulum semicirculi majorem esse omni Acuto rectilineo; an verò sit Recto rectilineo vel minor vel æqualis, non dicit: utrumvis autem dicatur, manet Euclidéi dicti veritas, modò non sit acuto minor: Item, Angulum contactûs (nempe siquis sit) minorem esse omni rectilineo, quia scilicet nec æqualis, nec major est; at verò, an sit omnino quantitas necne, non dicit; nec quidem, si dixisset, posset allata demonstratio id confirmare: nam & illud quod asserit verum manet, etiamsi suppositus ille angulus contactûs nihil sit; quod enim omnino nihil est, est certè omni positivâ quantitate minus.

Si

Si verò voluiſſet Euclides affirmâſſe, Angulum ſemicirculi minorem quidem eſſe quàm eſt rectus rectilineus, majorem autem quovis acuto rectilineo; oportuiſſet illum utrumq; membrum probaſſe: nempe, non modo angulum ſemicirculi majorem eſſe omni acuto rectilineo (quod quidem verum eſt de recto rectilineo, aut etiam obtuſo;) ſed & minorem recto eſſe; hoc autem nec probat Euclides, nec quidem omnino aſſerit. Et ſimiliter de Angulo Contactus; ſi affirmâſſe voluiſſet, Angulum qui dicitur Contactûs, verè quidem Angulum eſſe, & reverâ Quantum, minorem tamen omni acuto rectilineo; oportuiſſet utrumq; membrum probaſſe. At ille ſolummodo probat, Angulum contactus ſaltem minorem omni angulo rectilineo; an verò ſit revera Quantus necne, nec probat, nec affirmat, ſed prorſus ſilet. Non autem putandus eſt Euclides, acutiſſimus demonſtrator, qui ne ullum paralogiſmum uſquam admiſit, (fatente ipſo Ramo, qui tamen fatetur ſe deditâ operâ illud quæſiviſſe, quíq;, ut notum eſt, ſat ſeverus, nequid gravius dicam, in Euclidem judex erat,) non putandus, inquam, eſt Euclides, tantam παρεσίαν admittere voluiſſe, ut ubi duo ſat diſtincta propoſitionis membra (vel, ſi placet, duas propoſitiones) affirmâre voluerit, non niſi ipſorum unum demonſtraret.

At vero, quanquam Euclides neutrum horum dixerit, nempe, nec angulum ſemicirculi minorem eſſe recto rectilineo, nec etiam angulum contactus eſſe revera quantum, oppoſitam tamen opinionem, quamvis fortaſſe non verbis Euclidis, ipſius tamen ſententiæ contrariam eſſe, contendit Clavius. *Si enim*, inquit, *Euclides ſenſiſſet angulum contactus nihil prorſus eſſe, & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo: quid, obſecro, tantopere deſudâſſet, ut demonſtraret angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum vero ſemicirculi majorem? Quid enim clarius, quàm, Nihil, cujuſmodi eſt angulus contactus ex Peletarii ſententia, minus eſſe quocunq; angulo? Quid quoq; magis perſpicuum, quàm, angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, majorem eſſe quolibet acuto?*

Verùm ego, quæ eſſet Euclidis hac in re ſententia, non obſtante hoc Clavii ratiocinio, fateor me non ſatis aſſequi. Euclides certè, quod ſciam, ſuam hac de re ſententiam nuſquam profert. Illam vero ex Clavii ratiocinio ſatis pateſcere prorſus nego. Certum enim eſt, Euclidem aliquando minus aſſere-

re, quàm & asserere potuisset, & ipse senserit; sive quod nondum opus esset totum quod senserit producendi, sive quod nondum ex prædemonstratis commodè ostendi posset, sive alia forsan aliquando de causa. Exempli loco sint propositiones 16ª & 17ª primi. Prop. 16. sic est, *Trianguli uno latere producto, externus angulus utrolibet interno & opposito major est.* An verò ex hac propositionis forma dicendum est (juxta quod Clavius hic arguit de angulo contactûs) *Si Euclides sensisset angulum externum æqualem esse duobus internis oppositis simul sumptis, quid, obsecro, tantopere desudâsset, ut demonstraret utrovis majorem esse? quid enim clarius est, quàm, quod duobus simul sumptis est æquale, eorum utrovis sigillatim majus esse?* Prop. 17ª hæc est, *Trianguli duo anguli sunt duobus rectis minores omnifariam sumpti:* At (juxta Clavii ratiocinium) *Si Euclides sensisset, tres simul angulos æquari duobus rectis, quid, obsecro, tantopere desudâsset, ut demonstraret, eorum duos minores esse duobus rectis? quid enim magis perspicuum, quàm, quod tribus simul æquale est, eorum duobus esse majus?* An autem hinc concludere licet, vel, Angulum externum non esse æqualem duobus internis oppositis simul sumptis? vel, Tres angulos trianguli rectilinei non esse æquales duobus rectis? vel, Euclidem non ita sensisse? Nullo modo; nam & ea utraq; sic esse, & Euclidem illud non ignorasse, liquet ex 32 e 1. ubi illa & affirmantur & demonstrantur. Sed & etiamsi propositio hæc 32ª deesset, non tamen essent 16ª & 17ª vel minus veræ, vel minùs legitimè demonstratæ: verum quidem esset, Euclidem ea de re sententiam suam minus exposuisse. Pariter & de 16 e 3 dicendum est. Affirmat scilicet Euclides, Angulum semicirculi majorem esse quolibet acuto rectilineo, Angulum verò contactus quolibet acuto rectilineo minorem: quod autem attinet ad controversiam Peletarium inter & Clavium, prorsus tacet, neque suam sententiam omnino exponit; angulum nempe semicirculi recto rectilineo æqualem, neq; ait, neq; negat; angulum item contactus neq; negat, neq; affirmat, verè quantum esse.

Sed & eodem modo abstinet in 31 e 3 (ubi tamen locus esset opportunus suam ea de re sententiam proferendi:) affirmat enim, " *Angulum in semicirculo, rectum esse; in segmento majori, minorem recto; in minori segmento, majorem; item Angulum majoris segmenti majorem recto; minoris, minorem;* angulus autem *semicirculi* quantus sit (quamvis illud statim exspectandum esset) non dicit

cit, sed cautè abstinet, sive quod ipsi forsan vix constiterit quid erat dicendum, sive quod non præsto fuerit demonstratio quâ suam sententiam confirmet. Sed & veteres (quod sciam) omnes (præter unum Proclum) eâ de re prorsus tacent.

Non diffiteor quidem Recentiorum aliquot, magnos viros, & ex veteribus fortasse nonnullos (saltem Proclum) de angulo contactus ita loquutos esse, acsi haberet anguli quantitatem; adeóq; de angulo semicirculi tanquam minori quàm est angulus rectus rectilineus. Sed argumentis hac in re agendum est, non authoritatibus: præsertim cùm ex veteribus nemo, quod sciam, quidquam hac in re demonstrasse repertus sit.

CAP. III.

Anguli Plani natura & definitio explicantur.

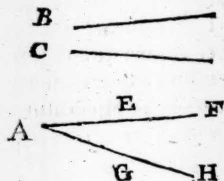
VT rem igitur controversam intimiùs aggrediar, inchoandum erit a natura *Anguli plani*; quem Euclides sic definit 8 d 1. " *Angulus planus est mutua* κλίσις, *seu inclinatio, duarum linea-" rum in plano sese tangentium* (ἁπτομένων) *& non indirectum posita-" rum.*

Peletarius hanc definitionem paulò immutatam mallet; ut nempe de linearum mutuo sese *secantium* concursu tantùm intelligatur. Verùm nulla necessitas cogit hujusmodi mutationem fieri. Quamvis enim, juxta Peletarium, solas illas lineas angulum continere, dicendum sit, quæ, si producantur, se mutuo secabunt: non tamen minùs verum erit, juxta eadem principia, easdem solùm lineas mutuò inclinatas concurrere: quæ enim suadent, circumferentiam cum recta contingente angulum non continere; eadem etiam suadebunt, has lineas mutuò inclinatas non esse: Ita ut non sit opus, ob hanc sententiam, Euclidis definitionem mutare.

In Euclidis verò definitione, notandum est primò, duarum linearum mutuam κλίσιν, seu inclinationem ad invicem, requiri. Ideóq; siquæ lineæ concurrant, nec tamen inclinentur ad invicem, angulum non constituent, quia nempe angulus, ex definitione, est linearum mutua inclinatio.

Deinde vero, non quævis linearum inclinatio, Angulus dicitur: sed linearum concurrentium, sive se mutuo tangentium

um ἁπτομένων· (nam ἅπτεσθαι apud Euclidem dicitur de quocunq; tactu, seu concurrentia; at ἐφάπτεσθαι, de contactu κατ' ἐξοχὴν, qualis definitur 2 & 3 d 3.) Quamvis enim lineæ distantes in eodem plano, inclinari ad invicem dici possint, ut B, C; non tamen angulum constituunt, nisi concurrant.



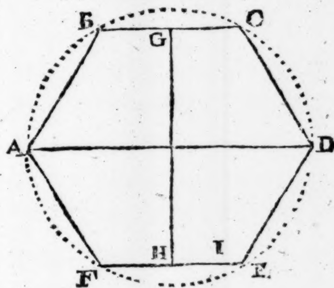
Et quidem ipsæ concurrentes lineæ, quamvis totæ forsan inclinentur ad invicem; angulũ tamen non alibi quam in ipso puncto concursus formant. Verbi gratia, lineæ A F pars quælibet ad lineam A H inclinatur; at non harum linearum partes quælibet, puta E F, G H, angulum formant; sed earum tantum extrema, in communi puncto A concurrentia: Et quidem quantacunq; utriusvis pars alia abscindatur, modo tantillum supersit ut concursus conservetur, angulus omnino invariatus manet; idem enim omnino angulus est qui cruribus A F, A H, & qui cruribus A E, A G, continetur.

Non igitur ex linearum concurrentium inclinatione qualibet, judicatur Angulus, (si nempe ita se habeant lineæ concurrentes, ut hic magis, illic minùs inclinentur,) sed ex illa quam sortiuntur inclinatione in ipso concursus puncto. Ideoq; angulus, quem facit perimeter Hexagoni A B C D E F cum recta A D, non æstimandus est ex quacunq; inclinatione quam habet perimeter in quacunq; sui parte ad rectam A D, (puta in parte B C) sed ex ea quam habet in punctis concursus A, D: sic angulus, quem facit cum recta G H, non ex inclinatione quam ubivis habet perimeter ad illã rectam, (putà quam habet in partibus A B, vel E D) sed quam habet in ipsis punctis concursus G, H.

Et quamvis dici possit, Perimetrum Hexagoni descripti, non esse lineam unam, sed ex variis (puta A B, B C, C D, D E, E F, F A,) aggregatam; ideoq; fallaciam πολυζητήσεως committi, si de inclinatione ejusmodi perimetri ad rectam quæratur: Idem tamen omnino eveniret, si, pro perimetro figuræ rectilineæ, ponatur peripheria, vel alia linea curva; cujus inclinatio ad quamvis rectam propositam non eadem manet (prout in rectis fieri solet,) sed in singulis punctis variatur, quamvis interim linea

isthæc

iſthæc curva pro unica linea habeatur. Non enim peripheriæ ſegmentum BC (aut quodlibet ipſius punctum) eandem inclinationem habet ad rectam AD, quam habet ipſius peripheriæ ſegmentum AB (aut quodvis ipſius punctum,) ad eandem rectam: Patet enim, ipſius ſegmenti BC ſitum magis ad parallelismum accedere, at ſegmenti A*B* propius ad perpendiculum: Angulus autem quem facit ea peripheria cum Diametro AD, non æſtimandus eſt ſecundum inclinationem ſegmenti BC (aut alicujus in eo particulæ) ſed ſecundum illam quam habet perimeter in ſui particula contigua, ſeu potius in ipſo puncto concurſus.



Deniq; , additur in illa definitione Euclidea, phraſis hæc, *μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, non in directum poſitarum*: unde innuitur, lineas in directum poſitas angulum non comprehendere. Non autem vult Euclides, per *lineas in directum poſitas*, lineas tantummodo rectas continuatas, ſive duo ſegmenta contigua ejuſdem rectæ: ſic enim continuata peripheria, in ſingulis ſui punctis, angulum formare dicenda eſſet, quod tamen nec Euclides, nec alii ſolent affirmare: Sed, per *lineas in directum poſitas*, eas intelligit, quæ ſeſe mutuo continuare dici poſſunt, ut exinde una linea fiat. Atq; hactenus Anguli plani naturam, quantum opus videtur, explicavi.

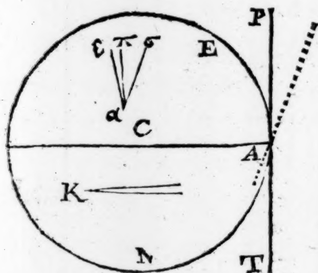
CAP. IV.

Argumentum primum, ab Anguli plani natura petitum.

His prælibatis, videamus quid in hac controverſia utrinq; dici poteſt.

Qui angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem aſſerunt, nituntur

Nituntur communi huic notioni, *Totum est majus sua parte*, vel, pars toto minor. At, inquiunt, semicirculi Angulus C A E, est pars anguli recti rectilinei C A P; ergo est recto minor; &



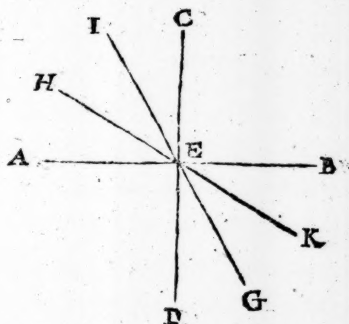
quidem tanto minor quantus est angulus interjectus E A P, qui est angulus contactus.

Peletarius contra, negat angulum semicirculi minorem esse recto rectilineo, aut recti partem esse, sed toti recto æqualem; quia scilicet angulus contactûs (qui auferri supponitur ex recto, ut restet angulus semicirculi) est non-angulus, ejusq; quantitas nulla: at qui aufert angulum tantummodo imaginarium, ille nihil aufert, & ejusmodi imaginaria ablatione quantitas non omnino minuitur, sed eadem, quæ prius erat, invariata manet.

Gardo igitur controversiæ hic est, An qui dicitur Angulus contactûs sit verè Angulus, verámq; anguli quantitatem habeat, ut vult Clavius; vel revera non-angulus, ut vult Peletarius, sed tantum angulus imaginarius, qui veram anguli quantitatem nullam habeat.

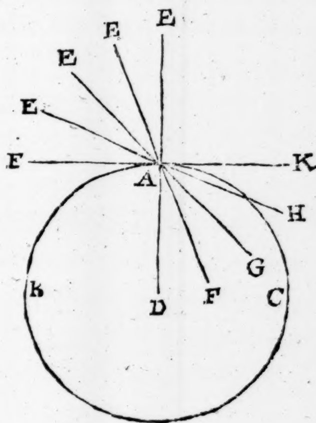
Ut hoc explicatius daret *Peletarius*, hujusmodi diagramma proponit. Duabus rectis A B, C D, se mutuo secantibus in puncto E ad angulos rectos; si intelligatur recta C D, puncto E fixo, circumvolvi, ubi pervenerit ad situm F G, ex angulis rectis fiunt obliqui (hinc acuti, illinc obtusi,) qui fient adhuc magis

magis obliqui cum perventum erit ad situm H K, & sic deinceps, donec perveniatur ad A B; tunc enim cessabit intersectio,



& simul angulus evanescet, quoniam non jam ad rectam A B inclinabitur, sed in ipsa jacebit immersa.

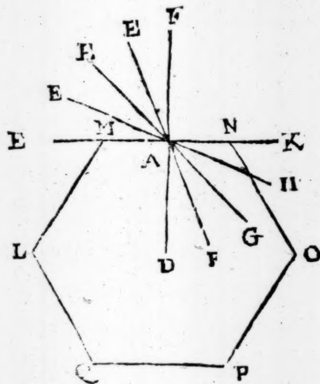
Neq; secus, inquit, est in curvo. Si enim D E, recta per centrum, peripheriam BAC secans in puncto A, super eo circumducatur per puncta F G H, fient anguli continuè varii cum peripheriâ, donec, cessante sectione, linea E D facta sit E K, ac tangat circulum. Atq; jam linea E D vel E K non inclinata intelligitur, sed immersa in ipsa B A C peripheriâ, quantum ad angulum attinet, non aliter quam si ipsa B A C esset linea recta.



Illud, credo, vult Peletarius; Rectam E D, cum perventum est ad situm E K, (ubi desinit peripheriam secare, & facta est

tangens,) non jam inclinari ad peripheriam, sed super ipsam ἀκλινῶς jacere, & cum ipsa coincidere, eousq, scilicet dum peripheria supponitur eandem inclinationem retinere quam habuit in ipso puncto A: Quòd autem postea quasi resiliat peripheria a recta E K, ideo factum est, quia peripheria suam inclinationem (ut et aliæ curvæ) subinde per singula puncta mutat, adeóq; ipsius inclinatio, quæ in puncto A nulla erat, quum primum ab eo puncto recessum est fit aliqua, quæ & deinceps continuò variatur, omnésq; possibiles variationes admittit.

Hoc autem fortasse meliùs concipietur, si, pro circuli peripheria, substituamus figuræ rectilineæ perimetrum: si igitur D E, perimetrum Hexagoni secans ad angulos rectos in puncto A, super illo circumducatur per puncta F, G, H, angulos continuo magis obliquos faciet usq; dum ad situm E K perveniat, hic enim cessat sectio, & evanescit angulus: ipsa enim E K in Hexagoni perimetro ἀκλινῶς jacet, & cum ipsa coincidit; non tamen cum tota perimetro, (neq; quidem ipsa tota, si saltem producatur,) sed cum ista perimetri parte M N quæ eandem retinet inclinationem quæ fuit in puncto A; at vero quum primum perimeter suam inclinationem mutat, in punctis M, N, deserit statim rectam perimeter & ab illa resilit, suamq; subinde inclinationem aliquoties mutat in punctis O, P, Q, L: adeóq; inclinatio perimetri respectu rectæ tangentis E K, quæ in puncto A nulla erat, fit subinde alia atq; alia. Quæ autem in figura rectilinea contingit inclinationis in singulis lateribus variatio, ea in circulo contingit in singulis punctis: unde recta E K, quæ figuram rectilineam contingit per integrum latus M N, (cum quo nullum igitur angulum facit,) eadem circulum non contingit

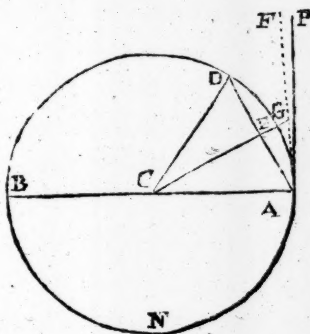


tingit

tingit nisi in unico puncto, ipsiq; soli ἀκλινῶς coincidit, adeóq; angulum non facit. Atq; ita sententiam Peletarii, quanta potui perspicuitate, proposui.

His ita explicatis, hoc modo licebit argumentum formare. Ubi linearum concurrentium nulla est inclinatio, (sive propter coincidentiam illud fiat, sive propter continuationem) ibi nullus est angulus, (est enim angulus mutua concurrentium inclinatio, per 8 d 1.) at circumferentiæ ad rectam tangentem, in puncto contactûs, nulla est inclinatio, (ut ex præexplicatis patet;) ergo nullus ab ipsis fit angulus. Angulus igitur, qui Contactûs dicitur, est angulus tantùm imaginarius, non vere angulus. Quod erat ostendendum.

Ad ulteriorem confirmationem minoris propositionis in hoc argumento, præter ea quæ jam dicta sunt, poterit & hoc, si o-



pus sit, breviter adjungi. Si circumducta semi diameter C B, circa centrum C, extremo suo puncto B, describat peripheriam B E A N; punctum B motu suo ante contactum in puncto A verget ad rectam tangentem A P, post contactum ab illa resilit, at in ipso contactûs puncto indifferenter se habet ad utrumq;, nec appropinquat enim nec elongatur, sed neq; rectam transit, continuatur tamen uniformiter motus: At motus invariatus, qui ad assignatam in eodem plano rectam neq; accedat, neq; ab ea recedat, neq; tamen transeat, quo pacto inclinatus dici possit, non video; (neq; enim versum inclinat, neq; retrorsum, nec ta-

men transit,) vel enim propter linearum coincidentiam, vel saltem parallelismum, fieri dicendum erit.

Qui autem secus sentiunt, idem videntur affirmare, (ut familiari utar instantia,) acsi dicerent, ambulantem in circulo Horizontali a puncto Meridionali N (ubi Orientem versus spectat) donec continuato itinere per punctum Orientale A, ad puncta E, D, perveniat (ubi Occidentem versus spectat,) nec tamen interim unquã directè spectet Septentrionẽ. Nam siquando directe spectet Septentrionẽ, erit certe cũ in puncto A existit, (prius enim aspectus ad Orientem declinat, postea verò ad Occidentem) si verò in puncto A directe spectet septentrionẽ, (neq; ad Orientem neq; ad Occidentem declinans,) erit certe in illo puncto A tendentia circuli (cujus ductum sequitur incedens) versus pũnctum P, (nam recta A P erit linea meridionalis, ut quæ lineam Orientis & Occidentis A B transversim secat ad angulos rectos,) adeóq; in illo puncto eadem erit tendentia tam circumferentiæ quàm rectæ tangentis; nullus igitur angulus, sed linearum coincidentia.

Vide figuram paginæ præcedentis.

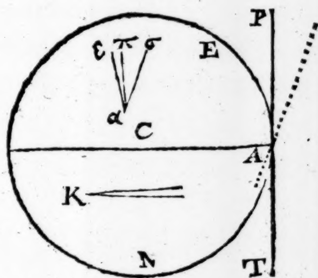
Sed, quoniam sententia isthæc Peletarii ægriùs antehac assensum invenit: Præter ea quæ dicta sunt, quæ quidem veram & genuinam rei causam videntur continere, adeóq; a priori demonstrare; Alias adhuc aliquot demonstrationes adjungendas duxi, partim a Peletario allatas, partim a me additas. Non quòd velim singula quæ inter Peletarium & Clavium agitantur examinare; quæ scilicet vel minùs caute ab hoc aut illo efferuntur, aut ad hominem dicta sunt, potiùs quam ad rem; sed ea solùm quæ argumentorum vires exhibent, ipsámq; rem controversam propius attingunt.

CAP.

CAP. V.

Argumentum secundum; Ubi, de Angulorum ὁμογένεια.

PEletarii argumentum primum, quo assensum cogere conatur, & cui præcipuas vires attribuit, est ἐπαγωγή, seu deductio ad absurdum, sive impossibile: nititur autem propositioni primæ decimi Euclidis, quæ hæc est, *Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, si a majori auferatur majus quam dimidium, & item a residuo majus quam dimidium, idq; continuè fiat; relinquetur tandem magnitudo aliqua minor magnitudine minore proposita.* Unde concludit Peletarius, quòd, si angulus contactus E A P, & rectilineus K, sint propositæ quantitates inæquales, sitq; angulus



rectilineus angulo contactûs major; si ab angulo rectilineo auferatur (vel semissis, vel) plusquam semissis, & deinde residui (semissis, aut) plusquam semissis, & sic deinceps; tandem relinquetur angulus rectilineus (nempe, si sectiones rectis lineis fiebant) angulo contactûs minor: At hoc fieri non posse demonstravit Euclides 16 e 3. Non sunt igitur angulus contactûs & rectilineus duæ inæquales quantitates (ut supponebatur;) sed eorum alter non-quantitas. Angulus igitur contactûs (nam de rectilineo non est quæstio) est non-quantus, sive non-angulus; quod erat ostendendum.

Atq; eodem modo arguere licebit ex 2ª primi Archimedis, de

de Sphærâ & Cylindro: quæ propositio hæc est, *Datis duabus magnitudinibus inæqualibus, possibile est duas rectas describere, quarum minor ad majorem, rationem habebit minorem, quàm habet magnitudo minor ad majorem.* Si autem possibiles sint duæ rectæ lineæ, quarum hæc ad illam minorem rationem habebit, quam habet angulus contactûs, ad rectilineum (quod omnino dicendum est, per hanc Propositionem, si angulus contactus sit vere quantitas,) certe angulus contactûs non erit omni angulo rectilineo possibili minor: quum possit angulus rectilineus in infinitum dividi, per 9 e 1, non minus quàm recta linea.

Sed & Euclides, & Archimedes, passim hoc assumunt in demonstrationibus quasi per se notum, & postulandum; *quantitatem minorem toties multiplicari posse ut quamvis assignatam majorem superet.* Ergo, & angulus contactûs (si saltem sit omnino quantus) toties multiplicari potest, ut angulum quemvis rectilineum superet; non esset igitur (quod tamen esse demonstravit Euclides) omni possibili rectilineo minor.

Quid autem Clavius ad hæc? Nempe ait, Propositionem illam Euclidis intelligi de illis quantitatibus quæ sunt ejusdem generis, & quarum utravis multiplicata alteram excedere possit; quod de angulo contactus & rectilineo dici non potest, cùm angulus contactûs quamtumvis multiplicatus angulum rectilineum superare nequeat. (Atq; idem, credo, dicturus esset de memorata propositione Archimedis, si illam adduxisset Peletarius.) Magnitudines autem illas, quarum altera multiplicata reliquam superare nequit, non censendas esse, ait, ejusdem generis, quod ad proportionem attinet, licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur.

Quibus ego hæc habeo quæ regeram.

1° Fatendum est propositiones illas, & quidem omnes alias ubi de proportionibus agitur, intelligendas esse de quantitatibus tantum homogeneis. Neq; enim Peletarius, nec, credo, quisquam alius, Quantitates Heterogeneas sic comparari posse diceret. Quis enim unquam affirmavit, Anguli ad Superficiem, Numeri ad Magnitudinem, Lineæ ad Solidum, ullam rationem esse? Aut quidem Heterogeneorum unum altero vel majus esse, vel minus, vel ipsi æquale? Vel etiam addi aut subduci posse? Nam quantitates Heterogeneæ, non modò sunt ἀσύμμετροι, (quod
&

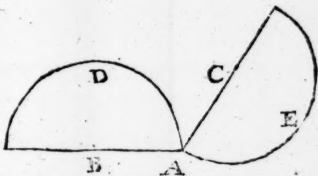
& inter Homogeneas etiam non rarò accidit, ut ex Decimo Euclidis manifestum est,) sed & plane ἀσύμβλητοι. Atq; illud satis innuit Euclides in *Rationis* definitione, 3 d 5, quum ait esse, *duarum magnitudinum* (ὁμογενῶν) *ejusdem generis*, *mutuam quandam secundum quantitatem habitudinem*.

Verùm 2°. Dico ego omnes omnino angulos planos, sive rectilinei sint, sive curvilinei, sive misti, Homogeneos esse, & quidem quamcunq; rationem ad alios assignandos subire posse; sive æqualitatis, sive inæqualitatis, rationalis, sive irrationalis. Quidenim impedit quo minùs ita se res habeat? aut quidnam illud est unde hanc ἑτερογένειαν oriri supponamus?

De Angulis Rectilineis inter se, res est in confesso: nemo enim unquam dubitavit angulos rectilineos in quàvis possibili ratione fieri posse? quamvis revera nondum methodus constet, (neq; forsan unquam constabit,) qua possimus datum angulum rectilineum in data ratione (Geometrici) secare.

De Angulis item curvilineis, rem etiam non negandam existimo: possunt enim curvilinei ad invicem vel æquales assignari, vel inæquales. Atq; idem etiam, de angulis mistis inter se, dici poterit.

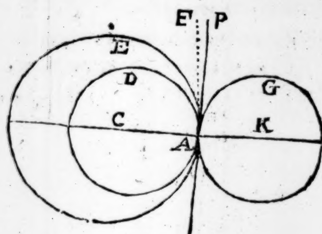
Imò verò & angulo rectilineo cuilibet possibili, possibile est & curvilineum æqualem assignare: prout ipse Clavius, ex Proclo, demonstrat, ad 5 d 5. Est enim, exempli gratia, angulus curvilineus D A E, æqualis rectilineo B A C: Et pari modo, cuivis rectilineo assignabili, assignabilis est æqualis curvilineus: ideóq; & curvilinei, non modò inter se, sed & cum rectilineis, quamlibet assignabilem rationem subire possunt, quam ipsi subire possunt rectilinei inter se: Non igitur curvitas crurum ἑτερογένειαν angulorum inducet, quin possint adhuc ad rectilineos rationem sive proportionem habere.



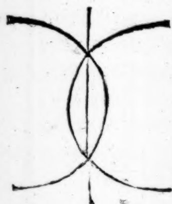
At fortassis dicetur, Quamvis verum illud sit de rectilineis & curvilineis quibusdam inter se, non tamen ita erit in angulis mistis,

Imo

Imò verò in angulis mistis illud etiam verum est, non modò si ad curvilineos, verùm etiam si ad rectilineos comparentur. Nam, duobus se mutuò contingentibus circulis, saltem æqualibus, G A, D A, quorum etiam utrumq; contingit, in eodem puncto A, recta P A; ne quidem ipse Clavius negabit angulum contactûs mistilineum GAP, (si modo sit angulus) semissem esse anguli contactus curvilinei GAD, semissis autem ad suum integrum veram esse rationem, nemo dubitabit. Angulus igitur curvilineus & mistilineus (si saltem anguli contactus sint verè anguli, ut vult Clavius,) sunt homogenei, & veræ rationis ad invicem capaces.



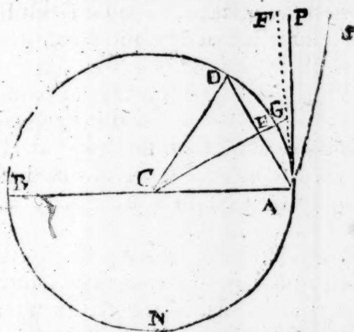
Quod si angulus, qui dicitur, contactûs revera non sit angulus, (prout ego, cum Peletario, existimo;) attamen curvilinei cum mistis nihilominus homogenei erunt. Nam si duo circuli, saltem æquales, se mutuò secent, &, per duo sectionum puncta, recta ducatur; manifestum est, fieri curvilineos angulos mistilineorum duplos, tam qui curvis convexis, quum qui curvis concavis, continentur. Potest igitur curvilineus, ad angulum mistum veram rationem habere; adeoq; ipsi, fatente Clavio, est homogeneus.



Sed & potest angulus mistus etiam ad rectilineum rationem habere; quod nec Clavium fuisse negaturum existimo. Nam recta (si non quæ tangit, saltem) quæ secat peripheriam, angulum cum peripheriâ (tam intra quam extra) mistum facit, qui erit angulo rectilineo, saltem aliquo, major; qui quidem multiplicatus poterit & quemvis assignatum angulum rectilineum superare, (& contra, rectilineus hunc) ideoq;, fatente ipso Clavio, λόγον ἔχειν, dicendus erit, per 5 d 5. Exempli gratiâ. Si peripheriam E A, recta S A secet, P A tangat, in puncto A; erit angulus mistus E A S vel æqualis vel saltem major angulo rectilineo P A S; & propterea

poterit

poterit multiplicatus quemvis angulum rectilineum superare, non minus quam ipse P A S, (& rectilineus illum,) ideóq; ad quemvis angulum rectilineum rationem habebit, per 5 d 5. Erit igitur angulus mistus E A S, rectilineo homogeneus: cur igitur & mistus E A P (si quidem sit angulus) non esset homogeneus, non video: crura siquidem vel eadem habent, vel quàm



simillima, nec aliter differunt quam quod magis aut minus divaricentur. Sed & eodem modo facile ostendi potest, omnes alios angulos, sive rectilineos sive curvilineos sive mistos, (si angulum contactus excipias) & quidem sive peripheriis sive aliis curvis formentur, tales esse quales ne quidem Clavius negaret cuivis angulo rectilineo & homogeneos esse & quidem λόγον ἔχειν; soli siquidem anguli contactuum, secundum illum, sunt quidem anguli plani, nec tamen aliis quibusvis sive rectilineis sive curvilineis sive mistis homogenei: Unde autem illa, quam somniet, ἑτερογένεια oriatur, neq; potest ille ullatenus ostendere, neq; ego vel somniare. Non nego quidem illum hac in re aliquid conari, sed conatu planè irrito: videamus tamen quid illud est.

CAP. VI.

Exceptionibus Clavii respondetur.

EGO, inquit Clavius, *angulos illos*, (contingentiæ scilicet & rectilineum) *Ejusdem esse generis negavi, hac solum de causâ, quod*

angulus contactus quantumvis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat.

At inquam ego, Idem omnino ſequi, ſi angulus contactus ſtatuatur (non quidem angulus heterogeneus, ſed) non-angulus. Nam, quod nihil anguli habet, quantumvis multiplicetur, nunquam conſtituet angulum: eâdem nempe ratione quâ *Ciphra*, quantumvis multiplicata, nunquam conſtituet *Numerum*. Aſſumit aut Clavius, illud nempe quod erat probandum, Angulum contactûs eſſe verè angulum; atq;, hoc quaſi conceſſo, conatur oſtendere, Heterogeneum eſſe, ſaltem quod ad rationem attinet; eo nempe quod angulus homogeneus non ſit per 5 d 5. Ego quidem definitionem Euclidis (cui ipſius argumentum innititur) facile concedo, & pro veriſſimâ aſſertione agnoſco; nempe *Rationem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſe mutuo ſuperare*; & contra, *Magnitudines, quæ non poſſunt, quantumvis multiplicatæ, ſe mutuo ſuperare, non dicendæ ſunt rationem inter ſe habere*; ſed pro heterogeneis habendæ ſunt. Non igitur affirmo angulum contactûs & rectilineum eſſe quantitates homogeneas, ſed nec heterogeneas, ſed eorum alterum quantitatem eſſe, alterum non eſſe. Atq; illud antea dixerat Peletarius, nec tamen quidquam ſolidæ rationis affert Clavius, quâ contrarium oſtendat.

Quod enim dicit, ex definitione anguli plani, *Ut angulus planus efficiatur, ſufficere duas lineas in plano ad invicem inclinari*, non autem requiri, *ut ſe mutuo ſecent*. Ego illud fateor; ſed nego peripheriam & rectam tangentem *ad invicem inclinari*, ſaltem quoad punctum concurſus; coincidunt enim, non inclinantur. Agnoſco etiam (quod alibi ait) *Angulum conſiſtere in unico puncto, & linearum inclinatione quæ non indirectum jacent*; verum lineas has *inclinari* non agnoſco. Sed & cum Peletario affirmo, eas ſolùm lineas *inclinari* (in puncto concurſûs) quæ, ſi producantur, ſe mutuò ſecabunt: neq; contrarium Clavius oſtendit uſpiam.

At, inquit, *Recta finita & infinita ideo non cenſentur ejuſdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat, quamvis ſub eodem genere magnitudinis, nempe lineâ rectâ, comprehendantur.*

Reſpondeo: Propoſitio Archimedis procedit de duabus magnitudinibus inæqualibus *datis*, (δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων,) Et ſimiliter Euclidis 1 e 10 de duabus magnitudinibus inæqualibus *propoſitis*, (δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων.) At verò quis

dedit

dedit unquam, vel *proposuit*, lineam *infinitam*? Quod enim (magnitudine) *datur*, eò ipso quòd datur, est finitum.

Fateor quidem dici solere, *Finiti ad infinitum nullam esse proportionem*. Sed, inquam, per *infinitum*, tunc intelligi, vel *indeterminatum* aut *indefinitum*; vel quid *Positivè infinitum*, quod nullos admittit terminos.

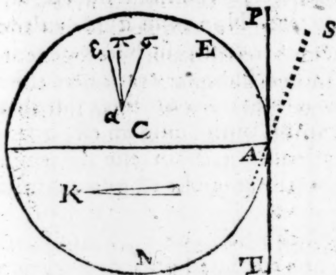
Priori sensu Euclides in 12 e 1, & passim alibi, vocem illam sumit; dum jubet rectam infinitam ducere, vel datam rectam in infinitum producere. Non enim illud vult ut lineam quis duceret, quæ, cùm ducta fuerit, sit infinita; esset enim hoc impossibile, & postulato secundo contrarium, cujus tamen vi ejusdem constructio juberi solet: sed ut linea quantumlibet longa ducatur. Et hoc sensu, verum quidem est, Quantitatis indeterminatæ ad determinatam nullam esse determinatam proportionem, sed vagam saltem, qualis est ipsa quantitas. At linea recta dum *indeterminata* est, *data* non est; hoc est, magnitudine data non est, licet positione dari possit; Linea igitur indeterminata, *magnitudo data*, non est; Et ad præsens negotium non spectat: linea verò data, est determinatæ magnitudinis, &, ad aliam quamvis datam, determinatam habet rationem.

Posteriori sensu, prout *Infinitum* significat id quod *positivè infinitum* sit, adeóq; omnes terminos possibiles actu excedat; ego planè nego, ejusmodi *rectam infinitam* omnino dari posse: adeóq; nihil mirum videbitur, Quantitatis impossibilis impossibilem esse rationem, seu proportionem; quod autem impossibile est, illud non est; adeóq; cum infiniti ad finitum ratio sit impossibilis, ejusmodi ratio nulla est, sive non est. At interim, magnitudinum inæqualium *datarum*, ratio etiam datur, (per 1. Dat. Euclid.) & propterea, si angulus contactûs & rectilineus sint quantitates inæquales verè datæ, dabitur etiam eorum ratio; & quidem, si anguli sint, erunt homogenei.

Deniq; (ut nihil prætercam, a Clavio allatam, quod alicujus momenti, hac in re, videri possit) hujusmodi forsan ratiocinium ex ipsius dictis (pag. 262.) colligi poterit Si duorum angulorum mutuò applicatorum duo crura homologa invicem congruant, reliqua verò duo crura non congruant, illi anguli non sunt æquales: At anguli contactûs crus alterum, nempe recta contingens, anguli rectilinei cruri superimpositum, congruere potest, at interim crus reliquum reliquo cruri non con-

gruet (quia curvum recto non congruet;) Ergo nulli angulo rectilineo æqualis est angulus contactûs; adeóq; nec ullam habebit ad angulos rectilineos rationem.

Respondeo 1°. Eodem argumento sequeretur etiam angulum E A S (peripheriâ & rectâ secante comprehensum) non minus quam E A P (angulum contactus) non modo nulli an-



gulo rectilineo possibili æqualem esse (quia nempe si crus alterum A S, anguli rectilinei cruri alterutri superponatur & congruat, reliquum tamen A E reliquo congruere non potest) quod fortè concederet Clavius: verùm propterea nullam esse rationem hujus ad illum, nempe anguli E A S ad quemvis possibilem rectilineum; quod tamen ne quidem Clavius diceret; non enim negare posset angulum E A S, saltem multiplicatum, posse angulum rectilineum, saltem aliquem, superare; præsertim cum citra dubium sit, ipsum E A S angulum mistum, rectilineo P A S vel majorem esse vel saltem æqualem. Argumentum igitur allatum, ne quidem Clavio judice, quicquam præstabit.

Ut autem non solum retorqueam argumentum, sed & nodum solvam; Respondeo 2°. Verum quidem esse quòd, si duorum angulorum æqualium duo crura homologa congruant, congruent etiam & reliqua duo crura, tamdiu scilicet quam eorum utrumq; eandem retinet inclinationem, quæ fuit in ipso puncto concursus (vel etiam ubi utrumq; simul æquè ab illâ inclinatione deflectat:) at vero si alterum suam quam in puncto concursûs habuit inclinationem retineat, reliqua verò suam mutet, illa non diutiùs congruent. At vero hoc in angulis mi-

stis

ctis (sive angulis contactûs sive aliis) ad rectilineas comparatis perpetuo accidit; propterea quod curva inclinationem suam in singulis punctis mutet, recta vero eandem semper inclinationem retineat; adeóq; quamvis earum in ipso contactûs puncto eadem fuerit inclinatio, postquam tamen ab eo recessum est fiunt earum inclinationes ad invicem alia atq; alia. Non igitur sequitur, angulum mistum angulo rectilineo æqualem esse non posse, quamvis non utraq; eorum crura, extra punctum contactûs, congruant. Atq; ita ea quæ Clavius adduxit, ut probet angulum contactûs & rectilineum heterogeneos esse, & non ejusdem generis ut inter eos aliquam rationem esse dicatur, satis refelli judico; adeóq; nihil superesse quò minus argumentum ex 8 e 10 desumptum legitimè concludat.

CAP. VII.

Angulorum Planorum ὁμογένεια *confirmatur.*

Verùm nequis existimet, id satis non esse, ea quæ in contrarium allata sunt refellisse; nisi & affirmative concludam, Angulum contactûs, si quidem angulus sit, reliquis angulis planis, & nominatim rectilineis, homogeneum esse: Sic argumentor.

1° Quæ mutuò possunt vel addi vel auferri; ea non sunt heterogenea: (Quis enim unquam Lineam Solido, aut Superficiem Numero, vel addi posse, vel auferri dixit? Possunt quidem ἀσύμμετρα, sive incommensurabilia, invicem & addi & auferri, ut in Binomiis & Apotomis notum est, & passim in X Euclidis: Heterogenea vero non possunt, sed plane sunt ἀσύμβλητα.) At angulus contactûs, si quidem sit angulus, & recto auferri potest, ut maneat angulus semicirculi internus; & recto adjungi potest, ut fiat angulus semicirculi externus: (atq; idem ostendi potest si ad alios quosvis angulos planos comparetur:) Non est igitur Heterogeneus.

Hujus autem argumenti vires, vel quod Peletarius monuerit, vel quòd ipse præsenserit, conatur Clavius quantum potest, frustra tamen, declinare. Ideóq; negat se Angulum contactûs asserere rectilineo simpliciter Heterogeneum esse, sed *quodammodo diversi generis*, (eo nempe quòd angulum rectilineum quantum-

vis multiplicatus superare nequeat:) &, licet quoad alia homogeneus sit, *non censeri* tamen *ejusdem generis quod ad proportionem attinet* At vero quo pacto ea, quæ quoad alia sunt homogenea, sint quoad rationem heterogenea, ego plane non video. Euclides certe 3 d 5, ubi Rationem definit, Homogenea, non dubitat esse, quoad rationem homogenea: Est enim, inquit, λόγος *ratio,* δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, *duarum magnitudinum, ejusdem generis, mutua quædam quoad quantitatem habitudo.* Siquæ igitur duæ quantitates homogeneæ sint (prout Clavius non negat hos esse angulos) earum mutua ad invicem quoad quantitatem habitudo *Ratio* dicitur.

Quod autem attinet ad ejusmodi quantitates homogeneas, sive ejusdem generis, quarum altera quantumvis multiplicata reliquam nunquam superabit: Euclides nullas agnoscit tales esse; sed ῥητῶς asserit, 5 d 5, Quantitates omnes, quarum una ad alteram *Rationem habere* dicendæ sunt, (hoc est, per 3 d 5, omnes quantitates *homogeneas,*) ita esse constitutas, ut *multiplicatæ se mutuo superare possint,* Et propterea, in 1 e 10, illud postulatum assumit, quasi per se notum, quódq; demonstratione non indigeat, *Quantitatem quamlibet minorem toties multiplicari posse ut tandem majorem quamlibet assignatam superet.* Nam in ipsa constructione seu κατασκευῇ ad illam demonstrationem, statim jubet *Magnitudinem minorem assignatam toties multiplicare, donec majorem assignatam superet;* quasi quidem illud fieri posse nemo dubitaverit. Et similiter Archimedes passim. At neq; Euclides neq; Archimedes, illud fieri posse, in aliis sive angulis sive quantitatibus, magis quam in ipso angulo contactûs, usquam ostendit. Vel igitur universaliter verum est, & postulandum, Quamlibet quantitatem minorem toties posse multiplicari ut quamlibet majorem assignatam superet; vel saltem Euclides aut Archimedes illud specialiter de quibusdam quantitatibus demonstrassent, quibus illud convenit, & non tanquam universaliter verum & per se cognitum postulassent. Poterat etiam Clavius meminisse, se Euclidem reprehendisse, quod axiomate 11 (vel, secundum aliòs, postulato 5) assumpserit, *duas rectas ad invicem in eodem plano inclinatas, si producantur, tandem concurrere;* quoniam hoc, quamvis verum sit, non tamen gratis assumendum erat sed demonstrandum, ideo nempe quia in lineis curvis hoc non constat (de quibus nec Euclides illud asserit.) Ideóq; Clavius

ad 28 e 1 illud demonſtrat; iis tamen ibidem aſſumptis quæ & nihilo minus dubia ſunt, & quæ eodem ipſo nomine ſunt reprehendenda. Quam juſta autem iſta ſit Euclidis reprehenſio, non hic vacat inquirere: at ſaltem eadem ratione, ne dicam longe majori, reprehendendus eſſet tam ille quam Archimedes, ſi modo hoc poſtulatum, quod indiſcriminatim aſſumitur, non eſſet univerſaliter verum: atq; Clavius, Euclidis reprehenſor, illud (ſi poſſet) demonſtraſſet de aliis omnibus quantitatibus verum eſſe, quamvis de angulis contactuum verum non ſit. Quodſi neq; Clavius, neq; quiſpiam alius poterit demonſtrare, aliis quantitatibus magis illud convenire quam hujuſmodi angulis (ſi ſaltem ſint anguli & vere quanti;) concedendum erit illud univerſaliter verum eſſe, prout Euclides & Archimedes videntur ſenſiſſe.

2° Sic ulterius arguo, Duæ quantitates, quarum altera major altera minor eſt, ſunt inter ſe *Homogeneæ*, & quidem (ſi illud interponere neceſſe ſit) *quoad Rationem* homogeneæ: Sed angulus contactûs, ſi quidē ſit angulus, & angulus quivis rectilineus, ejuſmodi ſunt quantitates. Ergo. Propoſitionē minorem demonſtrat Euclides 16 e 3. Major propoſitio pariter videtur indubitata. Nam quæ rationem habent ad invicem ſunt homogenea, per 3 d 5. At quæ ſe habent ad invicem ut majus & minus, ea ſaltem ad invicem Rationem habent. Quî enim fieri poteſt ut quantitas quantitate minor ſit, in nulla tamen Ratione minor? Imò verò, Quantitatem quantitate minorem eſſe, nec tamen ad illam Rationem habere, eſt contradictio in adjecto; nam ipſum *minus eſſe* eſt *rationem habere*. Atq; hoc quidem ne ipſe Clavius negare debet; nam & ille Proportionem ſive Rationem (quæ apud illum tantundem ſignificant, ideóq; & hic paſſim promiſcue uſurpantur) dividit in proportionem Æqualitatis & proportionem Inæqualitatis, & hanc iterum ſubdividit in proportionem Majoris Inæqualitatis, & Minoris Inæqualitatis, ſive Majoritatis & Minoritatis: Adeò ut quicquid ſit alteri vel Æquale vel Inæquale, quicquid altero Majus eſt vel Minus, illud ſaltem Rationem habet. Si igitur angulus contactûs ſit revera Angulus, ſitq; angulo rectilineo Minor, habebit ad illum rationem Minoritatis, ſive Minoris Inæqualitatis; Quæ autem rationem habent, ea poſſunt multiplicata ſe mutuo ſuperare: At angulus contactûs, quantumvis multiplicatus, rectilineum

non

non superabit; ideóq; nec rationem ad illum habet; quare nec est quantitas minor, nec quidem omnino quantitas.

Huic argumento nihil omnino est quod Clavium opposuisse reperio; Flussatem tamen legerat ubi hoc innuitur (laudat enim) adeóq; hanc difficultatem non tam ignoravit quam dissimulavit; nisi potius dici poterit, non illi incubuisse illas difficultates solvisse, quas, quamvis ipse noverit, Peletarius tamen non objecerit.

At Flussas Candalla, ad 16 e 3, Fatetur quidem rationem inæqualitatis concedendam esse inter angulum contactûs & rectilineum: verùm laxiorem esse hanc proportionem, ait, quæ intercedere potest inter illa quæ sunt diversi generis; at verò particularem certámq; rationem inter ea tantum intercedere quæ possunt multiplicata se mutuo superare.

At ego, quorsum se torqueant Mathematici, ut subterfugia tam tenuia tanto negotio exquirant, certe non video; cum possent hæc omnia quæ urgentur incommoda facillimo negotio devitare, modo fateri vellent, prout res est, Angulum contactûs esse revera non-angulum.

Clavius autem, quamvis Flussatem legerat, adeóq; ipsius responsum huic difficultati viderat, mallet tamen (ut videtur) totam hanc difficultatem dissimulare, quam tam leve responsum obtendere, dum tamen quicquam fortasse solidius quod opponat non habuit.

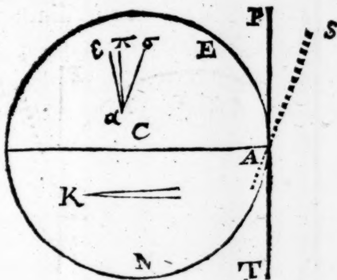
Flussati vero sic respondeo. Nobis quidem sufficere modo concedatur ratio inæqualitatis: Non enim postulat vel Euclidis vel Archimedis propositio, cui innititur argumentum, ut propositæ magnitudines sint *in certâ aliquâ ratione* inæquales, (puta in ratione multiplici, superparticulari, &c.) sed solummodo, ut habeant *rationem inæqualitatis*: *Datis* (inquiunt) *duabus magnitudinibus inæqualibus. &c.*

Hæc autem cùm scripseram, Flussatem paulo accuratius intuitus, comparatis item quæ ipse alibi habet ad 3 d 5 & 1 e 10; video illum, per *rationem incertam, confusam, indeterminatam*, nihil aliud velle, quàm ἄῤῥητον, ἄλογον, *surdam* vel *irrationalem*: adeóq; concedit ille id quod jam contendimus, nempe *angulum contactûs ad angulum rectilineum rationem habere propriè dictam* (modo scilicet quantitatem esse constet) illam scilicet quam vult Euclides 3 d 5 & 5 d 5. (adeoq; illum hac in re adversarium non habeo,)

beo;) *irrationalem* tamen esse hanc rationem existimat, nec veris numeris explicabilem. Sed & affirmat, angulum contactûs verum anguli quantitatem habere, eamq; quantitatem talem esse quæ multiplicata quantitatem anguli rectilinei superare poterit; non quidem manente angulo contactûs, sed mutato angulo contactûs in rectilineum; eodem scilicet modo quo angulus rectilineus acutus ita multiplicari potest, ut (mutatâ tamen specie anguli) rectum superare possit: Et, quo sensu acutus rectilineus est minor omni recto vel obtuso possibili, eodem (nec alio) & angulum contactûs esse minorem omni acuto possibili, posse tamen (mutatâ anguli specie) multiplicatum acuto rectilineo majorem fieri, sicut & acutus rectilineus (mutatâ specie anguli) multiplicatus evadit recto major, aut etiam obtuso, At hæc quomodo cum iis, quæ ab Euclide demonstrantur ad 16 e 3, constare poterunt, ipse viderit.

Verùm si tanti illud esse putet vel Flussas, vel quispiam alius, ut non modo ostendantur hæ magnitudines (si saltem utraq; sit verè magnitudo) *inæquales*, sed & *in certa aliqua ratione inæquales*, saltem vel rationali vel irrationali; Ego hoc facile probaturus sum sequenti argumento.

3° Igitur, dimittamus aliquantisper angulum contactûs EAP, & tractemus angulum semicirculi: Est, inquā, angulus semicirculi EAC non modò alicui angulo rectilineo *inæqualis*, sed & in *certa aliqua ratione* inæqualis; talem saltem rationem habet, qualem vult Euclides in 5 d 5: Potest enim, saltem multiplicatus

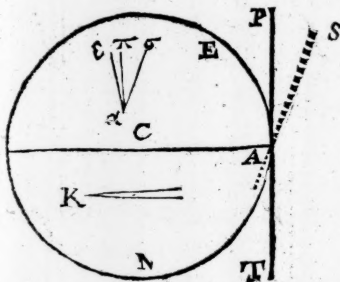


angulum rectum rectilineum superare. Quod neq; Clavius neq; quisquam alius negabit. Adeóq; angulus semicirculi, fatente Clavio, ad angulum rectum rectilineum, rationem certam & determinatam habet, quamvis illa fortasse cognita non esset.

At, per 5 Datorum Euclidis, *Si magnitudo ad sui aliquam partem habeat rationem datam, etiam ad reliquam habebit rationem datam*: adeoq; si angulus rectus rectilineus P A C, ad sui partem, nempe angulum semicirculi E A C (si saltem angulus semicirculi sit ipsius pars, & non potius ipse totus) rationem datam habeat, habebit & rationem datam ad partem reliquam E A P angulum contactûs: Et quidem, pari de causâ, si ad illum rationem *dabilem* habeat, quippe certam & determinatam, habebit & ad hunc rationem *dabilem*, certam puta & determinatam. Quod ostendendum erat.

Deniq;, quoniam ideo præsertim Clavius angulum contactûs rectilineis homogeneum esse non putat, neq; ad illos rationem ullam habere, quòd nulli rectilineo possibili æqualis esse possit; (quanquam illud leve sit argumentum; nam, verbi gratia, $\sqrt{2}$ nulli numero æqualis est, aut esse potest, cum sit latus surdum, non tamen est planè heterogeneum quid, neq; nullam omnino rationem habet quamvis non, ut loquuntur, rationalem:) conabor utcunq; & illud probare; nempe Angulum contactûs, si verè sit angulus, esse rectilineo alicui possibili æqualem, sequenti argumento.

4° Ostensum est supra, angulum curvilineum E A S, recti-



lineo

lineo cuivis homogeneum esse, atq; ad illum rationem proprie dictam habere, per 5 d 5, quia potest, saltem multiplicatus, rectilineum superare. Si verò sit rectilineis homogeneus, adeóq; v. g. ad rectum rectilineum veram rationem habeat, erit saltem alicui rectilineo æqualis: erit enim vel hic aliquanta pars recti, vel rectus hujus, vel deniq; erunt æquales: angulos autem rectilineos ad invicem in quâcunq; ratione constitutos in rerum naturâ possibiles esse, vix quisquam Mathematicus negabit; cum illud omni quantitati continuæ, propter ipsius divisibilitatem in infinitum, competere receptum sit; atq; hoc, si non Clavius, saltem Flussas expresse agnoscit, in iis quæ decimo Euclidis præmittit. Esto igitur angulo misto E A S, æqualis rectilineus εας: est autem hic vel æqualis ipsi P A S, vel saltem ipso major, (minor enim esse non potest, quoniam P A, cum tangens sit, extra peripheriam cadat, per 16 c 3.) si æqualis sit, conceditur quod erat probandum, nempe angulum εας, hoc est E A S, æqualem esse ipsi P A S, ideóq; angulum E A P nihil esse: Si vero εας sit ipso P A S major, auferatur inde πας ipsi P A S æqualis, per 23 e 1, & manebit εαπ ipsi E A P æqualis, per 3 a 1. hoc est, angulus rectilineus angulo contactûs æqualis. At dicetur, Euclidem demonstrâsse hoc esse impossibile, ut angulus contactûs sit rectilineo æqualis. Recte quidem; atq; illud ego agnosco. Sed inde sic disputo; si angulus contactûs sit verè angulus, erit alicui rectilineo æqualis, per ea quæ jam demonstravimus: At nulli rectilineo est æqualis, per ea quæ demonstrat Euclides 16 c 3: Ergo non est vere angulus. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Atq; hactenus principale Peletarii argumentum, ex 1 e 1 0 desumptum, ab iis quæ in contrarium afferuntur vindicavi; adeo ut ipsius sequela inconcussa maneat; atq; simul angulos planos tam curvilineos quam mistos rectilineis homogeneos ostendi.

CAP. VIII.

Honoratissimi Equitis D. HENRICI SAVILII Testimonium hac in re.

LIbet tandem hic subjungere, quæ inter Honoratissimi Equitis, D. *Henrici Savilii* (Patroni seu Fundatoris nostri Mu-

nificentissimi) schediasmata alicubi, de quantitatibus Homogeneis, reperio. inter scripta quædam illius imperfecta nondum digesta, de mensuratione Circuli, (quæ, ut videtur, adversus Josephi Scaligeri Cyclometrica inchoaverat,) de Ammonio, qui circuli quadraturam, propter ἀνομοιογένειαν linearum rectæ & curvæ, impossibilem esse putavit, Patronus ille noster (qui duos Mathematum Professores publicos suis sumptibus instituit) idemq; acutissimus Mathematicus, hæc habet; " Stultissimus Ammonius, ut est apud Simplicium, putavit ideo circulum quadrari non posse, quod non homogeneæ essent recta linea & circularis. Quo quid dici potuisset ineptius! Quid? non ea proprie homogenea sunt, quæ & proprie majora sunt alia aliis & proprie minora? Verbi gratia; Linea & Superficies heterogenea sunt, sic Superficies & Corpus, & plane ἀσύμβλητα, neq; enim linea proprie vel major vel minor dici potest superficie, nec superficies corpore, neq; enim inter se proportionem habent aut habere possunt. Nam, ut ait Magister noster, rationem habere inter se magnitudines dicuntur quæ possunt multiplicatæ se invicem excedere. Sed quadratum circulo inscriptum minus est, propriè & non καταχρηστικῶς loquendo, & circumscriptum majus. Et, de proportione rectæ lineæ & circumferentiæ, ostendit Archimedes, circumferentiam minorem esse quam $3\frac{1}{7}$ diametri, majorem vero quam $3\frac{10}{71}$. Et quidem omnis linea omni lineæ est ὁμογενής. Nemo etiam unquam doctus dubitavit, in rerum natura esse quadratum circulo dato æquale, etsi in eo investigando διὰ τῶν ἐπιπέδων θεωρίας, i e. per circulum & rectam lineam, sudarunt omnes penè tam antiqui quam recentiores, non magno tamen successu, etsi alii aliis fuerint feliciores.

Ex his liquet, juxta Honoratissimi *Savilii* sententiam, omnino absurdum esse, ea pro Heterogeneis haberi, quæ proprie majora sunt alia aliis, & proprie minora. Non tamen dissimulabo, illum de angulo contactûs & semicirculi aliquantulum hæsitâsse; (& quid tandem conclusurus fuisset, si, re mature penitatâ, inceptam illam disquisitionem perfecisset, non ausim asserere;) nam & hæc ad marginem adscripserat, " Quamvis de angulis κερατοειδοῦς & ἡμικυκλίου posset esse quæstio, qui mihi videntur proprie λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα per 3 d 5. nam proprie alter minor est omni acuto rectilineo, & alter major:

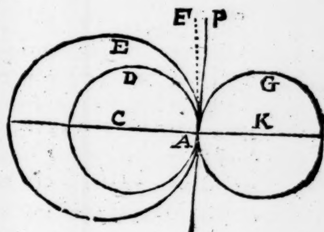
"neq; tamen potest κερατοειδὴς, utcunq; multiplicatus, vel minimum excedere rectilineum, quia minimus rectilineus potest "infinite dividi, Sed & statim subjungit. *def.* 3ª *&* 5ª Vi *libri irreconciliabiles*. Et quidem ego idem prorsus sentio; nempe, si statuatur angulum contactûs veram anguli quantitatem habere, definitiones illas duas simul esse veras non posse: At, si concedatur, angulum illum veram anguli quantitatem non habere, sed esse angulum tantummodò imaginarium; neq; inter se pugnabunt definitiones illæ, neq; cum 16 e 3 aut 1 e 10, aut cum aliâ quavis quam vel apud Euclidem vel Archimedem (ne plures nominem) uspiam exstare scio.

CAP. IX.

Argumentum tertium; ab æqualibus similium segmentorum angulis desumptum.

SEquitur aliud Peletarii argumentum examinandum. Illud verò huic Lemmati innititur, nempe, *Angulos similium segmentorum, saltem semicirculorum, esse æquales*. Cujus Lemmatis veritatem mox examinabimus. Interim, eo quasi concesso, hæc inde deducit Peletarius Theoremata.

1. *Contactus circulorum interior, quantitas non est*. Nam si semicirculorum anguli C A D, C A E, sint æquales, contactus interior DAE quantitas non erit, quoniam sive addatur sive auferatur quantitatem datam non immutat.



2. *Contactus lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est*. Nam si angulus D A P sit quantitas, partes habebit, ideóq; divisibilis erit; nempe vel per rectam ut F A, quod fieri non posse ostendit Euclides 16 e 3; vel saltem per curvam, puta E A circumferentiam majoris circuli, uti ponit Clavius; sed neq; per hanc, quia D A E non est quantitas, ut jam ostensum est: Sed neq; per aliam curvam, quæ non sit periphe-

ria EA, angulum D A P non dividat, nihil est quod suadeat hoc magis fieri posse per aliam quamvis curvam.

3. *Contactus circulorum exterior, quantitas non est.* Cum enim nec E A P, nec G A P, sit quantitas, (per præced) neq; erit E A G quantitas, eorum scilicet aggregatum.

4. *Anguli qui fiunt a diametro & peripheriâ, sive intra sive extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.* Nam, cum D A P non sit quantitas, erunt anguli D A C, D A K, æquales rectis rectilineis P A C, P A K.

Hæc Theoremata, ex illo Lemmate concesso, sat evidenti consecutione inferri, non negat Clavius, neq; alii credo negabunt. Tota lis est de veritate istius Lemmatis; An scilicet *Anguli similium segmentorum, saltem semicirculorum, sint æquales.* Hoc Clavius negat. Videamus igitur quid in illius defensionem adduci possit.

Quid autem ipse Peletarius adduxit in ejus adversus Clavium Apologia, nescio quidem, quoniam illam Apologiam nondum mihi contigit videre. At in ipsius commentario quodam *De contactu linearum*, (ubi eadem fere habentur quæ & in commentariis ejus in Euclidem ad 16 e 3, cum aliqua tamen accessione,) nonnulla profert, quibus istius Lemmatis veritatem adstruere conatur; quæ mox examinabimus.

Præmittit autem, *Hoc pronunciatum, pro principio Geometrico merito haberi posse.* Et quidem mihi non iniquum videtur postulatum, ut concedatur; (quanquam non ignorem illud ob præsentem controversiam, vix alia quidem causâ, in dubium vocari.) Non enim ego omnino video, quo pacto figuræ *similes* dici possunt, nisi & homologa latera habeant proportionalia, & similiter ad invicem sita: At, quonam pacto, quæ angulos inæquales faciunt, adeóq; inæquales habent ad invicem inclinationes, interim similiter sita dicantur, ego prorsus non intelligo.

In figuris rectilineis, nemo dubitat, variationem angulorum mutare speciem figuræ, (non enim aliter differt Rhombus a quadrato;) &, figurarum specie datarum angulos etiam dari, (per def. 3. Datorum Euclidis:) & quare illud in curvilineis & mistis figuris non obtineret, nulla ratio assignari potest. Adeóq; semicirculi, nisi æquales habeant angulos, figuræ similes dici non deberent.

Attamen, e contra, si figuræ duæ ita sint constitutæ, ut in illis rectæ omnes similiter positæ, sint (respective sumptæ) proportionales, quomodocunq; ducantur; eorum latera & angulos omnes similiter posita esse, quis dubitaret? Nisi enim similis esset linearum inter se situs atq; curvatura (sed in hac anguli acutiores, & major flexuum curvatura, in illâ secùs) impossibile est, ut inscriptæ in una figura, proportionales sint similiter inscriptis in reliquâ: ut per se videtur satis manifestum viro Mathematico. At verò in semicirculis omnibus, (aut etiam segmentis aliis quibuscunq; similibus,) rectæ similiter inscriptæ sunt inter se proportionales; & quidem, proportionalium subtensarum, similes arcus sunt etiam proportionales; ut Mathematicis omnibus est notissimum: ideóq; & similes in omnibus curvaturas, & angulos æquales, videtur omnino dicendum esse.

Non ignoro quidem Euclidem aliter figuras similes rectilineas, aliter similia circulorum segmenta definivisse. Nempe *Similes figuræ rectilineæ definiuntur, quæ angulos sigillatim æquales habent, & latera quæ circa æquales angulos proportionalia.* 1 d 6. *Similia* verò *circulorum segmenta* definit, non quidem ex æqualitate angulorum *quos habent*, sed *quos capiunt*: 10 d 3. Non quasi similium segmentorum anguli essent inæquales; sed quoniam, ubi postea de similitudine segmentorum agendum esset, facilius esset quantitatem anguli in segmento, quam anguli segmenti, demonstrare.

Et quidem certissimum est; Euclidem ea *κειτήρια* definitionibus inserere, non semper quæ rei naturam intimius spectent, sed quæ secuturis demonstrationibus meliùs subserviant, Exempli gratia. In ult. def. primi, definitur Parallelismus rectarum, ex *non-concurrentia, quamvis infinitè utrinq; producantur*; quod quidem in lineis rectis ejusdem plani, sat infallibile est criterium parallelismi: hoc autem *κειτήειον* præ aliis selegit, ut eò meliùs inserviret ea definitio demonstrationi prop. 27 e 1 ubi primo de parallelismo agendum esset. At interim nemo dubitare poterit, quin *æqualis ubiq; ab invicem distantia* intimius spectet parallelismi naturam, licet ipsius proposito nimis fortasse conveniret. Nam certissimum est, multa *non-concurrentia* non tamen esse parallela, ut liquet ex rectis non in eodem plano, item ex circulis qui ita duci possunt, ut neq; sint concentrici, neq; tamen se

mutuo

mutuo ſecent, item ex conchoide cum ſua recta, & ex linea hyperbolica cum ſua ἀσυμπτώτῳ, aliiſq; multis. At *Parallelismus* & *Æquidiſtantia*, vel idem ſunt, vel certe ſe mutuo ſemper comitantur. Atq; idem de aliis non paucis definitionibus dicendum eſſe, nemo, qui rem ſerio perpendit, dubitare poterit.

Atq; illud proculdubio dicendum erit de ſimilitudine figurarum. Quamvis enim Euclides ex re ſua fuiſſe duxerit ſimilitudinem aliter in figuris rectilineis, aliter in circulorum ſegmentis, definire, quò meliùs ſcilicet ſecuturæ demonſtrationes procederent: Attamen non dubitandum eſt eandem utrobiq; communem ſimilitudinis notionem tam Euclidem quam alios Geometras habuiſſe, licet non eodem ſemper medio eadem facilitate poſſet utrobiq; pro re nata demonſtrari. Figuras enim ſimiles eſſe (ſive rectilineæ ſint, ſive curvilineæ, ſive miſtæ; ſive item planæ, ſive gibbæ, ſive concavæ; ſive deniq; ſuperficiales, ſive ſolidæ) nil aliud in univerſum eſt, quàm, earum ſingulas partes homologas ſimiliter tam ad ſe invicem quam ad totam ſitas eſſe: Et quicunq; hoc demonſtraverit de quibuſvis figuris, quocunq; demum medio id fiat, demonſtrabit illas ſimiles eſſe. Non enim *ſimilitudo* de ſimilibus rectilineis, & ſimilibus curvilineis Æquivoce prædicatur, (ſecundum aliam atq; aliam ſignificationem) ſed planè univoce.

Cùm igitur angulorum æqualitas, (ſine qua nec eadem erit partium ad invicem inclinatio, aut ſimilis inter ſe poſitio,) in ipſa communi Similitudinis notione includatur; non eſſet iniquum poſtulatum ut hoc pro principio per ſe noto concedatur, (utpote quod ex mera terminorum explicatione immediate reſultat,) *ſimilium figurarum angulos eſſe æquales.*

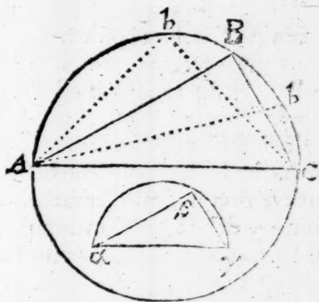
CAP. X.

Similium ſegmentorum angulos æquales eſſe, ulterius confirmatur.

QUamvis autem hæc æqualitas angulorum in figuris ſimilibus, ſatis videatur manifeſte in ipſa *Similitudinis* notione contineri, ut jam dictum eſt; adeoq; veritatem illius aſſertionis, *Semicirculorum angulos æquales eſſe*, tanquam pronunciati ſua luce noti concedendam eſſe: Attamen, quoniam, ob præſentem controverſiam, illud in dubium vocatur; attulit Peletarius nonnulla

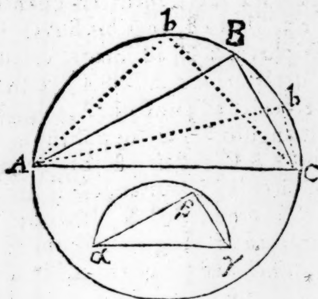
nonnulla quibus ſententiam ſuam hac in re confirmet, Quæ ſi cui forſan, prout ab ipſo proferuntur, minùs ſatisfaciant, conabor illa & explicare & confirmare, aliáq; prout res tulerit adjungere. Quanquam non ignorem eò difficiliorem mihi incubituram provinciam, quò minùs diſtet aſſertio probanda a principio per ſe concedendo, quaſi ſuâ luce cognito. Quando enim de hujuſmodi propoſitionibus, quæ vel principia ſunt vel principiis proxima, oritur controverſia; difficilius reperitur Medium quo probetur, quod ſit ipſa re probanda minus dubium: cùm tamen niſi ex præconceſſis & notioribus nulla procedat legitima argumentatio. Non tamen ob hanc difficultatem quicquam diffido rem illam ſatis Geometrice demonſtrandam fore.

1° Argumentum deſumam ex 10 d 3, quæ eſt ſimilium ſegmentorum definitio. *Similia circuli ſegmenta, ſunt, quæ angulos capiunt æquales; aut, in quibus anguli ſunt inter ſe æquales.* Peletarius hinc urget, eadem anologia & *ſegmentorum angulos* æquales cenſendos eſſe non minùs quàm *angulos in ſegmentis*: Hoc eſt, qua ratione anguli rectilinei A B C, $\alpha\beta\gamma$, in ſimilibus ſegmentis æquales ſint habendi, eadem & angulos miſtos BCA, $\beta\gamma\alpha$, item BAC, $\beta\alpha\gamma$, æquales etiam habendos eſſe. Quod ego quidem verum eſſe non dubito. Nam niſi peripheriæ ABC, $\alpha\beta\gamma$, eandem habeant inclinationem ad ſuas ſubtenſas AC, $\alpha\gamma$, non erunt ad illas ſimiliter poſitæ, adeóq; neq; figuræ ſimiles erunt. At ſi eadem utrobiq; inclinatio, tum & idem utrobiq; angulus per def. anguli plani.



2° Sed, quoniam Euclides in hac 10 d 3 illud non ῥητῶς de angulis ſegmentorum, ſed de angulis in ſegmentis verba facit; ego inde paulò aliter argumentum inſtituam, aſſumpta etiam 21 e 3, nempe, *In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli ſunt inter ſe æquales.* Unde ſequitur angulum ABC omnino eundem

prorſus eſſe ubicunq; in ea peripheria ſumatur punctum B, eundem nempe cum eo qui eſt in ſimili ſegmento $\alpha\beta\gamma$. His poſitis, ſupponamus rectam A B (quantum opus eſt prolongatam) puncto A manente, circumduci; adeóq; peripheriam ſecare in variis ſucceſſive punctis B, B, B, &c. Et ab his punctis ſectionum rectas B C, B C, B C &c. duci, ad idem punctum C. Manifeſtum eſt, prout punctum B ad punctum C propiùs accedit, rectam A B longiorem fieri (modò ſegmentum propoſitum non excedat ſemicirculum) & B C breviorem, (angulo interim A B C non mutato,) uſq; dum rectâ A B ad ipſam A C accedente, idem fiat punctum B & C, hoc eſt, recta B C in unicum peripheriæ punctum degeneret, adeóq; recta B C (quanta quanta ſit) jacere ſupponitur in ipſa peripheria; adeóq; recta A B, ad ſitum A C delata eoſdem nunc angulos cum peripheria facit quos prius fecerat cum recta B C producta, nempe angulum A B C, ejuſq; reſiduum ad duos rectos; hoc eſt, angulum inferiorem (qui eſt oppoſiti ſegmenti angulus) eundem cum angulo A B C, atq; (eadem ratione) angulum ſuperiorem eundem cum ipſius complemento ad duos rectos. Sed & idem prorſus eveniret in ſimili ſegmento $\alpha\beta\gamma$, adeóq; & illic $\alpha\beta$, ad ſitum $\alpha\gamma$ delata, eoſdem angulos facit ad peripheriam quos prius fecerat ad $\gamma\beta$ (ultra punctum β productam) hoc eſt, eos quos A B ad rectam B C (productam) fecit. Adeóq; ſimilium ſegmentorum A B C, $\alpha\beta\gamma$, licet inæqualium, (quod etiam oppoſitis eorum ſegmentis accidit,) anguli ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum.



Atq; etiam eadem opera demonſtratum eſt, ſi ſegmenta illa ſimilia ſint ſemicirculi, eorum angulos æquales eſſe rectis rectilineis; erit enim in ſemicirculo, tam angulus A B C, quam ipſius reſiduum ad duos rectos, angulus rectus.

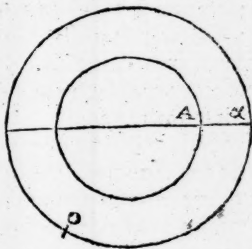
Item, in univerſum, Angulus in ſegmento, æqualis eſt angu-

lo segmenti oppositi. Seu, quod idem est, Angulus in peripheria segmento insistens, est æqualis angulo istius segmenti cui insistit.

3° Idem sic evincitur. Angulus B A C tantus est quantus semissis peripheriæ B C, per 20 e 3, (hoc est, angulus B A C est ad quatuor rectos, ut semissis peripheriæ B C, ad integri circuli peripheriam.) Ideoq; si eousq; divaricentur A B, A C, donec ipsum B (sectionis punctum) perveniet ad punctum A, (ipsaq; A B degeneret in punctum,) erit angulo B A C, oppositus integer semicirculus; ideóq; angulus B A C rectus est. Et, quoniam idem accideret in quovis semicirculo, igitur anguli semicirculorum sunt æquales, nempe recti omnes. Sed & idem ostendi potest, etiam in aliis similibus segmentis. Ergo similium segmentorum anguli sunt æquales; tanti nempe quantus istorum peripheriarum semisses.

4° Idem hoc modo probatur. Quoniam in semicirculo angulus A B C rectus est, per 31 e 3; ideoq; anguli B A C, B C A, simul, æquales recto, per 32 e 1: Si igitur recta A B moveatur usq; dum perveniat ad situm A C, angulus B A C evanescit sive nullus erit, ideóq; B C A (qui jam fit angulus semicirculi) rectus erit; nam quod aufertur angulo B A C, additur angulo B C A, ut nempe ambo æquentur uni recto. Atq; idem ostendi potest in aliis segmentis similibus; nam, per 32 e 1, erunt B A C, B C A, simul, æquales residuo anguli A B C ad duos rectos; ideóq; cum A B C, in eodem vel similibus segmentis, semper idem maneat, erit summa angulorum B C A, B A C, eadem; adeóq; cum B A C prorsus evanescit erit reliquus B C A ipsi summæ æqualis. Similium igitur segmentorum anguli sunt æquales.

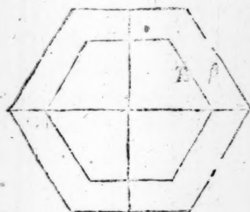
5° Idem arguo ex natura Parallelismi. Nam, ductis pluribus circulis concentricis, recta per centrum illos secans faciet angulos alternos æquales. Ideo semicirculorum anguli A, *α*, quamvis inæqualium æquales sunt.



Dicetur forsan, illud quidem valere in parallelis rectis, per

29 e 1. non autem in lineis curvis utut parallelis.

Respondeo; Illud quidem speciatim ab Euclide demonstrari de parallelis rectis: At verò non minùs verum est de parallelis quibuscunq;. Non enim hoc oritur ex linearum rectitudine, sed ex earum parallelismo. Hujus enim affectionis vera causa hæc est: quoniam si, verbi gratia, rectæ B, β, parallelæ sint, erunt æqualiter ubiq; ab invicem distantes: At hoc non fiet nisi quanta sit unius versus alterã inclinatio, tanta sit & hujus ab illa reclinatio: si enim recta β ad rectam B magis inclinet, quam hæc ab illa reclinat, erit earum ad invicem appropinquatio; si contra, elongatio; non autem eadem manebit distantia. Sed & idẽ omnino sequeretur in curvis: Nam, si peripheria α (*fig. præced.*) magis inclinet ad peripheriam A, quam hæc ab illa reclinat, vel cõtra; necesse erit ut earum distantia ab invicem mutetur, neq; cõstans maneat; quod tamen earum parallelismus supponit. Cum igitur eadem sit utrobiq; affectionis hujus causa, eadem erit utrobiq; affectio, sive in rectis sive in curvis; nempe recta parallelas secans angulos alternos æquales faciet: Et propterea, anguli semicirculorum, utut inæqualium, æquales erunt.



6° Addo etiam; cùm illud in figuris aliis regularibus omnibus accidat, ut nempe in figuris similibus rectæ similiter positæ æquales respectivè angulos cum perimetris faciant; non credendum est illud in circulis secus esse: Eadem enim est omnino ratio in figuris trium, quatuor, quinq;, sex, aut quotvis cunq; laterum, sive sint numero finita sive infinita; adeóq; & in circulo.

Verissimum quidem est, ejusmodi affectiones, quæ, in figuris regularibus, quoad mensuram decrescunt, prout laterum numerus augetur, aut contra; eas in circulo (qui est quasi polygonon infinitorum laterum) prorsus evanescere. Ut, verbi gratia, differentia rectarũ quæ a centro ad latera perpendiculariter ducuntur, ab ipsis rectis quæ a centro ad angulos ducuntur; hoc est, rectarum a centro brevissimæ & longissimæ differentia:

(ideoq;

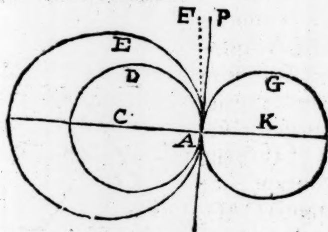
(ideóq; & differentia similium figurarum circumscriptæ & inscriptæ eidem circulo:) est enim (cæteris paribus) in figuris plurium laterum minor differentia; adeoq; in circulo nulla. Item, in figuris plurium laterum, anguli in perimetro majores sunt quàm qui in perimetris laterum pauciorum, adeóq; in circulo evanescunt, cujus tota perimeter est ideo una linea, indirectum posita, licet non recta. Atq; idem in similibus aliis affectionibus ostendere liceret.

At affectiones ejusmodi quæ æqualiter se habent & invariatè in figuris omnibus regularibus, sive sint plurium sive pauciorum laterum, æqualiter etiam se habebunt in circulo, sive polygono laterum infinitorum. quæ enim non omnino dependent a laterum numero, sed a figuræ regularitate, eodem prorsus modo se ubiq; habebunt. Verbi gratia. Rectangulum, recta a centro ad perimetrum perpendiculari, & semisse perimetri, contentum, æquatur areæ figuræ regularis quotcunq; laterum; ut notum est: ideóq; & in circulo illud obtinet: quod ostendit Archimedes lib. de dimensione circuli. Item Polygona similia sunt ad invicem in duplicata ratione homologorum laterum, (vel etiam rectarum quarumvis similiter positarum,) per 20 e 6: Sed & idem de circulis verum est, per 2 e 12. Item, Pyramis est triens prismatis in basi & altitudine iisdem vel æqualibus constituti: sed & eadem est ratio Coni ad Cylindrum, per 10 e 12. Atq; idem prorsus liceret ostendere in aliis affectionibus innumeris, quæ, si omnibus figuris rectilineis regularibus quotcunq; laterum indiscriminatim conveniant, nulla consideratione habita ad laterum numerum, eadem & circulis pariter convenient. Adeóq; cùm in aliis figuris quibuscunq; similibus, utcunq; inæqualibus, rectæ similiter positæ similes cum perimetro angulos faciant; quidni & idem de circulis, aut circulorum segmentis dicendum esset? præsertim cum nihil solidæ rationis in contrarium adduci possit.

CAP. XI.

Objectioni in contrarium respondetur.

QUod enim in contrarium ostendi solet, hoc unicum est; Angulum semicirculi minoris, ut D A C, ideo minorem videri quam est angulus semicirculi majoris E A C, quia mi-

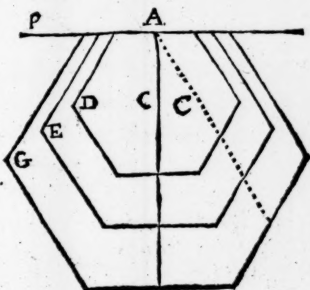


nor peripheria introrsum recedens a majori statim resilit, adeóq; partem solummodo anguli E A C videtur abscindere, quæ igitur toto minor erit: Et quidem angulus contactûs (cum lineâ rectâ tangente) E A P, eâdem de causâ minor videtur quam angulus contactus D A P, cùm hujus crura magis videantur divaricari & ab invicem resilire.

Verùm hoc, si rectè perpendatur, nihil suadet in contrarium eorum quæ a nobis proferuntur. Non enim magnitudo anguli æstimanda est ex eâ quam habent crura divaricatione extra punctum concursus, sed ex eâ quam habent in ipso concursûs puncto. Adeóq; angulus E A P minor est angulo F A P (per 16 e 3,) non quod illius crura minùs divaricentur extra punctum contactûs, (nam E P, magis distant quam F, P.) sed propter minorem inclinationem, seu potius coincidentiam, linearum E A, P A, in ipso puncto A. Inquam, *in ipso puncto* A: Nam, quamvis, ut ostendit Euclides, inter rectam P A & peripheriam E A, alia recta, ut F A, cadere non possit; hoc est, quæ minorem habeat inclinationem ad rectam P A quàm habet peripheria E A: Attamen hoc de alio quovis puncto præter ipsum A dici non potest; nullum enim aliud est punctum assignabile in curvà E A inter quod & rectam P A non possit alia recta

recta cadere. Nam quodcunq; assignetur punctum (quod non toto saltem semicirculo distet ab A) poterit ab eo ad rectam P A recta duci, quæ & extra peripheriam cadet (verbi gratia, quæ peripheriam tangit in puncto assignato) & cum recta P A (saltem producta) concurret, quæ tamen aliâ rectâ ut F A poterit secari; quæ igitur inter assignatum peripheriæ punctum & rectam P A cadet.

Addo etiam, ejusmodi divaricationem conspici in aliis figuris regularibus se mutuo contingentibus Ut in Hexagonis D A, E A, G A, se mutuo contingentibus in A: quorum Perimetri et se mutuo deserunt, & rectam tangentem P A, quum primum suam quam in A habebant inclinationem mutant: at non propterea anguli C A D, C A E, C A G vel inter se differunt vel ab ipso C A P. (Atq; idem omnino eveniet sive recta C A sit Hexagoni lateri pendicularis vel ad alium quemvis angulum constituta, modo similiter posita sit in singulis figuris.) Quod autem de Hexagonis ostenditur; similiter eveniret, si, pro Hexagonis, statuerentur aliæ figuræ similes quotlibetcunq; laterum; ubiq; enim, in figuris similibus, rectæ similiter positæ, æquales cum perimetro angulos faciunt. Idem igitur & de circulis se mutuo contingentibus censendum est: Nam licet peripheriæ, propterea quod suam inclinationem in singulis punctis mutent, statim post contactûs punctum se mutuo deserant; non tamen in ipso contactûs puncto variam habuisse inclinationem, vel angulos inæquales cum recta eorum per centra transeunte fecisse, aut etiam cum alia quavis recta similiter posita, censendum est. Atq; hactenus de æqualitate angulorum, similium segmentorum, diximus.



CAP. XII.

Argumentum quartum, seu Argumentorum Classis quarta, quia quod omni positivâ quantitate minus est, est non quantum.

ADjungam aliud Argumentum, seu potius aliam Argumentorum classem. Præmittam tamen hoc sive Axioma sive Postulatum.

Quod est omni positivâ Quantitate minus, illud est non-quantum.

Atq; hoc vel expresse assumitur, vel saltem tacitè innuitur; non modò apud Archimedem passim, in libris De Sphæra & Cylindro, De dimensione circuli, De quadratura Parabolæ, De lineis Spiralibus, De æqui ponderantibus, &c, Sed & passim apud Euclidem, ut in 2 e 12, 18 e 12, aliisq; propositionibus innumeris; & quidem in iis ferè omnibus quæ demonstrantur per deductionem ad absurdum seu impossibile.

Exemplum esto 1ª Archim. *de dimensione circuli*; in hunc sensum: *Circulus æqualis est triangulo rectangulo, cujus laterum angulum rectum comprehendentium alterum quidem æquatur circuli semidiametro alterum vero ejusdem peripheriæ.* Hanc autem propositionem hoc modo demonstrat: Si enim triangulum illud sit vel majus vel minus circulo proposito; esto, inquit, differentia æqualis spatio (verbi gratia) A, aut alii cuivis assignato. At hoc, inquit, fieri non potest; Quoniam possibile est figuram rectilineam circulo inscribere (quæ igitur circulo minor erit) quæ tamen ab illo triangulo minus deficiat quam est spatium assignatum A quantulumcunq; sit; item figuram rectilineam circulo circumscribere (quæ igitur major erit) quæ tamen triangulum illud minus excedat quam est assignatum spatium A, quantulumcunq; demum sit; quorum utrumq; ab eo demonstratur: Non est igitur triangulum illud vel majus vel minus, quam circulus propositus, spatio quovis assignabili quantulumcunq; sit; est igitur æquale.

At verò, quàm facilè esset & hanc & innumeras alias demonstrationes eludere, si modò dicere liceat, Differentiam illam esse quidem omni assignabili quantitate minorem, non tamen nullam; ideóq; nec quantitates propositas esse æquales.

Vel

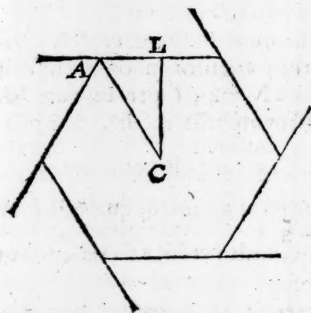
Vel igitur concedendum est, demonstrationem illam Archimedis, aliasq; ejusmodi innumeras, apud omnes Geometras receptas, sophisticas esse & plane fallaces; quod neminem sobrium dicturum existimo: vel, quod potius asserendum erit, Differentiam illam, quæ est omni assignabili spatio minor, nullum esse: hoc est, Quod omni assignabili quantitate minus est, id nihil est, sive non-quantum.

Hoc autem quod postulatur concesso, sic licebit argumentari.

1° Substituamus aliquantisper, pro circulo, Polygonum regulare rectilineum circulo inscriptum quotvifcunq; laterum. Estóq; numerus laterum quantumlibet magnus, N; eritq; idem numerus angulorum Perimetri, (tot enim sunt anguli quot latera,) quorum angulorum omnium aggregatum erit æquale angulis rectis $2N - 4$, (per ea quæ habet Clavius ad 32 e 1) nempe bis tot angulis rectis, demptis quatuor, quot sunt figuræ latera; Ergo angulus quilibet $\frac{2N-4}{N}$ unius recti: hunc autem bisecat recta a centro; quæ igitur angulum cum perimetro facit $\frac{N-2}{N}$ unius recti, vel $1 - \frac{2}{N}$; hoc est, angulum rectum dempto $\frac{2}{N}$ recti: Differentia igitur istius ab angulo recto tanto minor est, quanto numerus laterum major; cum igitur numerus laterum augeri possit in infinitum, ita & differentia istius anguli a recto in infinitum minui, in eadem semper ratione quâ numerus laterum augetur. Ideóq; in Polygono infinitorum laterum, istius anguli differentia ab angulo recto est infinitè parva, (nam si sit N infinitum, erit $\frac{2}{N}$ infinite parvum;) At, quod est infinitè parvum, illud est omni positivâ quantitate minus, ideóq; & non-quantum. Jam verò Polygonum infinitorum laterum, vel circulus est, vel saltem circulo inscriptibile: Si prius; erit igitur differentia anguli semicirculi ab angulo recto infinite parva: Si posterius; erit ea differentia adhuc minor, (nam latus polygoni circulo inscripti, cum extremitate diametri, angulum facit minorem quam facit peripheria cum eadem diametri extremitate, ideóq; magis

a recto deficit quam angulus Semicirculi.) Quod verò vel infinite parvum est, vel (si fieri posit) minus quàm infinite parvum, illud est omni positiva quantitate minus, adeoq; non-quantum. Angulus igitur contactûs, quæ est differentia anguli semicirculi ab angulo recto rectilineo, est non-quantus. Quod erat demonstrandum.

2° Potest & idem pariter ostendi hoc modo. Si figuræ cujusvis regularis singula latera producantur (versus unam partem) fient tot anguli externi, quot sunt latera; quorum omnium aggregatum æquatur quatuor rectis (per ea quæ habet



Clavius ad 32 e 1) ideoq; eorum quilibet $\frac{1}{N}$ quatuor rectorum. Supponamus jam, ut prius, Polygonum infinitorum laterum; erit igitur istius angulus externus, ($A = \frac{4}{N}$ rectis) quatuor rectorum pars infinite parva, (nam si sit N infinita, erit $\frac{1}{N}$ infinite parvum.) Est autem hic angulus, vel ille angulus contactûs de quo loquimur (si nempe polygonum infinitorum laterum habeatur pro circulo,) vel saltem illo major (per 16 e 3:) Si prius dicatur; est angulus contactûs infinite parvus: Si posterius, est adhuc minor: At quod vel infinite parvum est, vel minus quàm infinite parvum, illud est omni positiva quantitate minus, ideóq; non quantum. Est igitur angulus

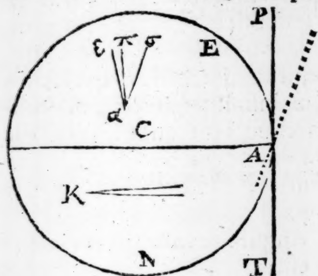
lus contactûs non-quantus. Quod erat ostendendum.

3° Quoniam magnitudo anguli tam externi A, quàm interni ejusve semissis C A L, æstimanda sit ex numero laterum, (ut ostensum est) adeóq; figuræ regulares eundem laterum numerum habentes habeant etiam ejusmodi angulos æquales: si concipiatur circulus ut Polygonum infinitorum laterum, concipienda sunt infinita latera unius circuli tot quot infinita illa latera alterius circuli (secus enim non essent circuli figuræ similes) & consequenter erunt tam anguli contactûs æquales quam anguli semicirculorum; (quod supra aliis argumentis contendimus:) Unde sequetur, Angulos contactûs esse non-quantos; ut supra etiam ostensum est.

4° Idem aliter sic patebit. Si a centro Polygoni regularis (vel, quod idem est, circuli circumscripti,) ducatur recta ad Polygoni perimetrum duos utrinq; angulos æquales faciens, erit illa vel lateri perpendicularis, & C L, vel ad figuræ angulum ducta ut C A; (nam, sicubi alias ducatur, manifestum est angulos obliquos fieri, & inæquales.) Manifestum etiam est, differentiam rectarum C A, C L, semper minui, prout numerus laterum augetur, usq; dum tandem in Polygono infinitorum laterum, sive Circulo, fit vel infinite parva vel nulla: sed hoc obiter. Supponamus jam, ut prius, pro circulo Polygonum infinitorum laterum: quoniam autem radius cum peripheria angulos facit æquales, (ut manifestum est) concipiendus est vel ut recta C L (ad medium lateris) vel ut C A (ad angulum:) si priùs supponatur; erunt anguli recti, (nam recta a centro ad medium lateris Polygoni regularis angulos rectos facit;) Si posterius; saltem (cum omnes radii sint æquales, adeóq; C A, C L, æquales) erunt anguli C A L, C L A, æquales per 5 e 1; ideóq; & uterque rectus: (Angulus autem A C L nullus erit, sed ipsa crura A C, L C, coincident.) Utrumvis igitur supponatur, erit angulus semicirculi recto rectilineo æqualis; & propterea angulus contactus est non-quantus. Quod erat demonstrandum.

5° Subjungam huic argumento etiam hanc speculationem non absimilis naturæ. Si angulus contactus E A P sit vere angulus; tunc & residuus ad duos rectos erit vere angulus, nempe E A T, vel P A N, qui continetur rectâ tangente & peripheria semicirculi remotioris, puta T A & A E, vel P A & A N.

neq; erunt lineæ T A, A E, aut P A, A N, in directum positæ, (nam lineæ in directum positæ non continent angulum, per 8 d 1.) At, hoc concesso, multo magis dicendum esset duas peripherias N A, A E, angulum continere; est enim curvatura N A E dupla curvaturæ T A E. Quod si N A E non sit angulus, sed una linea continuata sive in directum posita (prout concedi solet ab omnibus; quis enim dixerit in singulis peripheriæ punctis angulum formari?) neq; erit T A E vel P A N angulus, sed potius linea in directum posita; Et consequenter neq; P A E aut T A N angulus erit, sed potius lineæ coincidentes, quantum scilicet ad ipsum punctum contactus attinet.



Atq; hinc obiter discere licet, quo pacto duæ dissimiles lineæ, puta curva & recta, vel peripheria & parabola, vel etiam peripheriæ majoris & minoris circuli, aut etiam convexa & concava, &c. continuari possint. Quod monuisse sufficit.

6° Notum est, aream figuræ regularis quotcunq; laterum æqualem esse rectangulo quod semiperimetro & rectâ a centro ad perimetrum perpendiculari continetur; (sin recta illa non sit ad perimetrum perpendicularis, seu ad angulos rectos, secus erit,) At idem ostendit Archimedes, (prop. 1. de dimensione circuli,) de circulo; nempe aream circuli æqualem esse rectangulo sub radio & semiperipheria; Est igitur radius ad peripheriam perpendicularis, sive ad angulos rectos. Si enim angulus radio & peripheria comprehensus, minor esset recto rectilineo; esset area circuli minor quam ejusmodi parallelogrammum rectangulum. Nam illud quidem universaliter verum est; si duæ rectæ, quarum altera est semiperimeter figuræ regularis, altera recta ad latus ipsius quodlibet quocunq; angulo ducta, parallelogrammum eodem angulo contineant, erit hoc parallelogrammum areæ istius figuræ regularis æquale, (ut probari potest ex 35 e 1.) Cum igitur parallelogrammum radio (hoc est, recta a centro) & semiperipheria comprehensum, quod a-

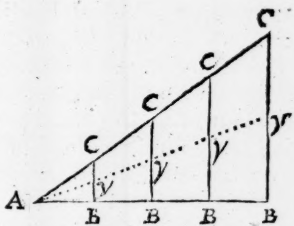
reæ circuli æquatur, ſit rectangulum; manifeſtum eſt, & angulos quos illa recta a centro ad peripheriam facit, rectos eſſe & rectis rectilineis æquales. quod erat oſtendendum.

CAP. XIII.

Argumentum quintum: ex proportione evaneſcente, deductum.

SEquitur aliud argumentum. Cui hoc Lemma præponendum eſt; [*Si duæ quantitates ſimul proportionaliter vel creſcunt vel decreſcunt; ubi earum una reducta ſit ad nihilum ſeu non-quantum, etiam & reliqua ad nihilum ſeu non-quantum reducitur.*

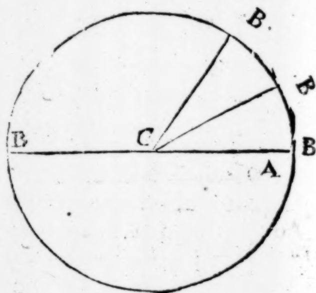
Exſemplum hoc eſto. Rectæ AB, AC, angulum A utcunq; faciant; ipſiq; AB ubivis inſiſtat BC angulum ABC rectum faciens (vel, ſi libet, alium ad libitum.) Jam ſi ſupponatur BC recta, ſuper rectam AB moveri invariato angulo ABC; prout punctum B remotius vel propius diſtat a puncto A, in eadem ratione recta BC augetur vel minuitur, per 4 e 6. Quoniam igitur



AB . AB :: BC . BC proportionales ſint, ubicunq; ſumatur punctum B; ſi, inquam, punctum B ſumatur idem quod A, adeóq; diſtantia AB nulla ſit, (propter coincidentiam punctorum A, B,) etiam & longitudo lineæ BC nulla erit. Quod, ſi opus eſt, probari poterit ex 16 e 6. Et quidem licet alibi alia ſit ratio rectæ AB ad BC quam ad Bγ, tamen ſi B aſſignetur in ipſo A, tam BC quam Bγ ſimiliter in punctum degenerant.

Exſemplum aliud hoc eſto. Quoniam, ſi recta CB, manente centro C, circumvolvatur; angulus BCD, & peripheria

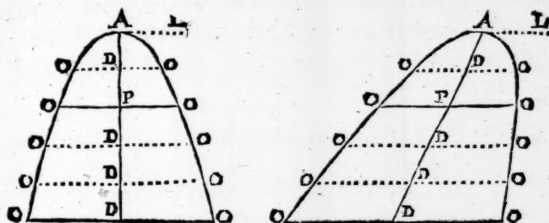
B A proportionaliter vel crescunt vel decrescunt, per 33 e 6: Ubi C B pervenerit ad situm C A, adeóq; (propter coincidentiam punctorum B, A,) peripheria evanescat, sive degeneret in punctum; etiam evanescit angulus B C A, & degenerat in non-angulum: Et, contra, ubi hoc fit, illud fiet. Quod etiam probari poterit, per 16 e 6.



Atq; idem pari modo fiet in aliis duabus quantitatibus quibusvis, quæ simul vel crescunt vel decrescunt proportionaliter. Prout liquet ex illa propositione 16 e 6. Quamvis enim ea speciatim de rectis lineis ab Euclide & affirmetur & demonstretur; attamen idem non minus verum esse de quibusvis quatuor proportionalibus nemo dubitat, cum idem subsit in omnibus fundamentum: unde notissima illa regula, quæ *Aurea* dici solet, originem ducit; quia nempe, ex quatuor proportinalibus, quod fit ex mutua multiplicatione mediorum, æquatur facto ex mutua multiplicatione extremorum. Ideóq; si mediorum alterum sit ciphra seu non-quantum, necesse est ut & extremorum alterum sit etiam ciphra seu non quantum: secus enim ea æqualitas factorum non prodibit.

Imò idem etiam omnino accidit, non modò ubi eadem est utriusq; quantitatis crescendi & decrescendi ratio, sed etiam ubi incrementi & decrementi ratio in una quantitate est rationis quæ in alia quantitate reperitur, duplicata vel triplicata (vel alio etiam aliquo modo immutata:) ut liquet in Parabola. Quoniam enim ordinatim applicatæ in eadem Parabolâ crescunt & decrescunt, non quidē in eadem ratione cum diametris, sed in subduplicata ratione diametrorum: adeo tamen, ubi harum alterutra redigitur ad non-quantum, etiam reliqua ad non-quantum redigetur. Verbi gratiâ, Quoniam in Parabolâ A O, prout Diametri punctum D aliud atq; aliud assumitur ita tam Diameter A D, quam ordinatim applicata O D, bre-

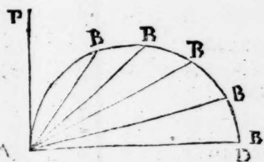
vior est aut longior; non tamen utraq; in eâdem ratione, sed



altera in alterius ratione duplicatâ; sunt enim diametri ad invicem, non ut ipsæ ordinatim-applicatæ, sed ut ordinatim-applicatarum quadrata, (prout notum est ex principiis Conicis,) nempe AD AD : : ODq ODq Si tamen punctum D assignetur in ipso Parabolæ vertice A, adeo ut intercepta diameter AD nulla sit (propter coincidentiam punctorum A, D,) etiam & ordinatim-applicata OD nulla erit, sive nullius longitudinis; ut patet.

Sed & idem eveniet in Hyperbola, vel Ellipsi, aliâve ejusmodi curvâ; ubi tamen ratio diametri ad ordinatim-applicatas magis adhuc est intricata. Adeo ut Lemmatis veritas abundè constet.

His positis; sic procedit argumentum. Sit recta PA extremo diametri AD perpendicularis, adeóq; peripheriam ABD contingens in puncto A, unde recta AB (quantum opus est extensa) concurrat cum peripheriâ ubivis in B: circumducta jam recta AB secabit peripheriam in variis successivè punctis quorum quodvis B insigniatur: semper autem hoc transitu, peripheria BA & angulus rectilineus BAP proportionaliter simul tam crescunt quam decrescunt, per



32 e 3 & 33 e 6. Ideoq;, ubi punctum B ad ipsum A pervenerit,

rit, adeoq; peripheria B A evanescat & nullius evadat magnitudinis, simul etiam angulus B A P evanescet & nullus fiet, sive nullius magnitudinis. Est autem, hoc in casu, angulus ille B A P, vel ipse angulus contactus, vel saltem non ipso minor; Ergo angulus contactûs nullius est magnitudinis, sive non-angulus. Quod erat demonstrandum.

C A P. XIV.

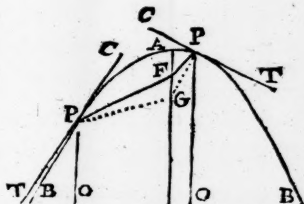
Argumentum sextum, Ex Opticis petitum, & Sectionibus Conicis.

MOnet hic tandem Clavius, & quidem recte, *Id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, docetur; verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur: Ut enim demonstrat Apollonius Pergæus lib. 1. prop 32. In locum, qui inter coni sectionem & rectam lineam tangentem interjicitur, altera recta linea non cadit: A que adeo angulus ille contactus minor etiam est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitatur perpendicularis) omni acuto rectilineo major.* Hoc ego quidem tanquam verissimum agnosco, non modò de sectionibus conicis, sed & aliis quibusvis curvis: nempe angulum contactus, qui ad illas efficitur, minorem esse omni angulo acuto, utpote qui sit non-angulus; reliquum verò ad rectum, majorem esse omni acuto rectilineo, est enim rectus, & recto rectilineo æqualis: est enim hic eadem ratio quæ in circulo. At hic, inquit, *major absurditas apparet, quoad sensum, in eâ Ellipsi quæ perexiguam habet latitudinem, & in ea Hyperbolâ quæ ferè linea recta esse videatur: valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipsis & Hyperbolæ constituti.* Verum ego neq; majorem absurditatem neq; omnino ullam hic conspicio. Quamvis enim crurum divaricatio extra punctum contactus varia videatur; in ipso tam contactus puncto non est varia linearum inclinatio, nec quidem omnino ulla. Et, si nihil absurdi sit, lineas contiguas in ipso contactus puncto, æqualiter omnes *distare*, (hoc est, non omnino,) licet extra illud punctum earum distantiæ (pro varia ipsarum divaricatione) variæ sint; cur magis absurdum esset, earum omnium *inclinationes*, in puncto contactûs, æquales esse (hoc est, nullas) licet alibi sint admodum inæquales? Aut etiam

tiam (quoniam ad sensus judicium fit provocatio) cur magis incredibile existimem, acutam illam Ellipsin, & obtusam Hyperbolam, in ipsis contactuum punctis, ad rectas tangentes pariter non-inclinari, quamvis postea varie divaricentur; quam, easdem pariter suas rectas non nisi in unico puncto contingere? Nam & hoc sensui non magis credibile videbitur; neq; tamen Clavius, credo, negaret.

Quoniam verò de contactibus in Coni sectionibus mentionem facit Clavius; videbimus & illic omnia nostræ sententiæ consentanea. Instantiam desumam ex opticis; quæ hæc esto.

Tradit Vitellio, lib. 5. prop. 2. *Angulos incidentiæ & reflexionis, æquales invicem esse, in speculis quibuscunq;, sive planis sive concavis sive convexis*: Atq; illud etiam agnoscunt Optici omnes. Sed & idem Vitellio, lib. 9. pr. 43. ostendit, *In speculo concavo parabolico radios omnes, qui in illud ubivis incidunt axi paralleli, ad unicum idemq; punctum, qui Focus dici solet, reflecti*: Quod & post illum agnoscunt alii Optici. Hoc autem ut demonstret, ostendit, ex Apollonio, lineam incidentiæ, & lineam reflectionis ad focum, angulos æquales cum rectâ contingente facere. Verbi gratiâ. Sit punctū objecti, O unde ad speculi punctum P ducatur recta OP, axi parallela: inde autem ad focum PF: Erunt anguli OPT, FPC,



(cum recta tangente CPT facti) æquales; ut Vitellio ex Apollonio demonstrat; ideoq;, inquit, reflexio fiet ad punctum F: atq; idem fiet quodcunq; sit punctum speculi P, in quod radius OP axi parallelus inciderit. At oportuit ostendisse, non tam angulos OPT, FPC, ad contingentem factos, æquales esse; quàm OPB, FPA, ad speculum factos, æquales esse; angulum nempe incidentiæ & reflectionis in speculo. Vel igitur æqualitas angulorum ad rectam contingentem, eandem infert æqualitatem angulorum ad speculum; vel demonstratio non procedit. Cùm igitur demonstratio hæc pro legitima solet, quod sciam, ab omnibus haberi; dicendum est eandem utrobiq; esse æqualitatem. Ideóq; cùm æquales sint tam OPT,

F P C, anguli ad contingentem, quam O P B, F P A, anguli ad ſpeculum; erunt etiam (per 3 axioma primi Euclidis) anguli C P A, T P B, vel æquales, vel potius nulli. At manifeſtum eſt etiam, crura cruribus non utraq; congruere; nam ſi angulus alter alteri ſuperponatur, quamvis congruere poſſint crura P T, P C, attamen P B, P A, non congruent, neq; alterum in altero jacebit, ſed tota P B, ſolo puncto B excepto, cadet inter ipſas P C, P A, ut nemo non concedet, qui Parabolæ naturam ſatis intelligit. Unde etiam manifeſto liquet, crura illa, quæ, extra punctum concurſus, variè divaricantur, poſſe tamen æquales angulos continere.

Verum ſiquis diceret (contra Vitellionem, alióſq; Opticos) Radium O P, non reflecti ad punctum F præciſe (quamvis ad illud quam proximè) eò quod exiſtimet angulum O P B, angulo F P A, non præcisè æqualem, ſed aliquantillo majorem, propterea quod angulus ablatus B P T, angulo ablato A P C, minor videatur: Sic refutandi erunt. Si non ad punctum F fiat reflexio; eſto, ſi fieri poſſit, ad punctum aliud aliquod inferius in axe aſſignandum, (nam ad aliquod ſaltem axis punctum reflexionem fieri, nemo dubitabit,) ſitq; illud punctum G, ut tandem angulus reflexionis A P G, fiat æqualis angulo incidentiæ O P B. Erit ergo angulus rectilineus F P G, differentia angulorum F P A, G P A, ſeu F P A, O P B, adeoq; angulorum A P C, B P T; quod fieri non poteſt, cum ſit horum utervis omni angulo rectilineo poſſibili minor: non poteſt enim alia recta inter rectam contingentem & coni ſectionem cadere, per 32 lib. 1. Apol. Non ergo fit reflexio ad G, ergo ad F; ideóq; tam anguli A P F, B P O, quam G P F, T P O, ſunt æquales; ideóq; A P C, B P T vel ſaltem æquales, vel potius

tius nulli. Idem igitur & de angulis contactuum in Conicis sectionibus verum est non minus quàm in circulis. Sed & argumentorum præcedentium aliquot de sectionibus conicis, aliisve curvis, pariter atq; de circulis concludunt.

Postquam hoc totum negotium absolveram, admonuit me (quod ante nesciebam) Clarissimus vir D. *Sethus Ward*, apud nos Astronomiæ Professor *Savilianus*, dignissimus Collega meus, Cabbæum, in libro suo de Meteoris, Vitellionis demonstrationem ut minus sufficientem improbasse, ea quidem de causa quam & ego jam innui; adeò ut eam quam subjunxi confirmationem non omnino inutilem fuisse, sed plane necessariam, jam reperiam.

CAP. XV.

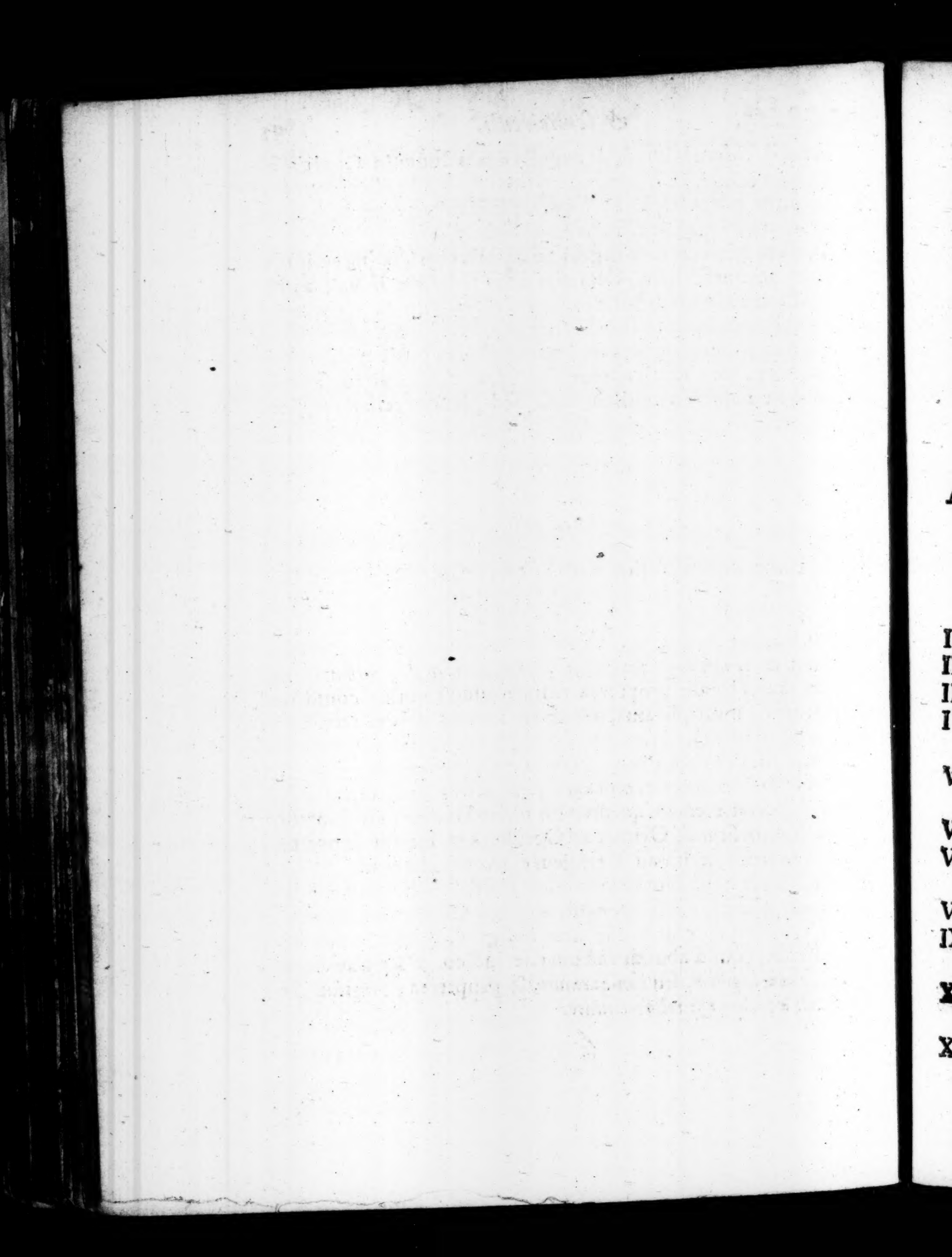
Clavii Corollariis respondetur.

DEniq; mysteria aliquot hic adjungit Clavius, quasi ex Euclidis propositione, prout ab ipso est intellecta, emergentia. Ut illud Cardani;

Potest aliqua quantitas continuè & infinitè augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunq; sit, minus semper erit decremento hujus: propterea nempe quod angulus contactus quantumvis multiplicatus, minor sit angulo quovis rectilineo quantumvis diminuto.

Item illud ex Campano; *Transiri posse a minori ad majus, vel contra, & per omnia media, nec tamen per æquale.* Quod tantundem est acsi diceret, erectum quemvis in plano Horizontali stantem, posse dextrorsum ab Oriente ad Occidentem faciem convertere nec tamen interim ad Meridiem conversam habeat.

At hæc, & siqua sunt similia, cùm aliud non habeant fundamentum, quàm quòd supponant, *Angulum contactus vere quantitatem esse*, ulteriore refutatione non indigent. Sufficit enim demonstrasse, (quod abunde factum esse judico.) *Angulum contactus esse non-angulum*, seu *non-quantum*; & propterea, *Angulum Semicirculi æqualem esse recto rectilineo.*





INDEX CAPITUM

In Tractatu Præcedente.

XII.

XII. *Argumentum quartum, (seu argumentorum classis quarta, sex distinctis argumentis constans,) hinc desumitur, quoniam, Quod omni positivâ quantitate assignabili minus est, est non-quantum.*

XIII. *Argumentum quintum; ab evanescente proportione desumptum.*

XIV. *Argumentum sextum; ex Opticis petitum, & sectionibus Conicis.*

XV. *Clavii corollariis respondetur.*

FINIS.



Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academiâ OXONIENSI,

DE
SECTIONIBUS CONICIS,

Nova Methodo Expositis,

TRACTATUS.



OXONII,

Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. *Anno* 1655.



Clarissimis Viris, & Mathematicis,

D. *SETHO WARD* S.T.D.

& D. *LAURENTIO ROOK* M.A.

Publicis Astronomiæ Professoribus; altero *Saviliano* in Academia *Oxoniensi*, altero *Greshamensi* in *Greshamensi* Collegio *Londini*.

JOHANNES WALLIS *Geom. Prof.* *SAVILIANUS.* S.



Uid novi ferat (Clarissimi Viri) Libellus iste, ab ipso statim quem præfert titulo innotescit. Nempe Sectiones Conicas (rem veterem) nova methodo tradit. Erat scilicet Conicorum traditio Veteribus jam olim cognita, Apollonio Pergæo vetustior, & quidem in methodum jam tum redacta; ut nec ipse diffitetur Apollonius, & aliunde constat: (Nam Archimedes ipse Apollonio antiquior, *Elementa Conica* sæpius memorat:) sed ab Apollonio, (cujus Conicorum libri quatuor supersunt,) in meliorem formam redacta, & insigniter aucta, (quod in causa fuisse cre-

 dimus

dimus cur priora illa Elementa Conica perierunt.) Antiquiores enim illi, Coni solius Recti (quem solum Euclides definiverat) contemplationem aggressi, non aliam videntur ipsius sectionem considerasse quam quæ fit a plano quod ipsius lateri alicui rectum sit; quod propterea in Cono Rectangulo (eo nempe cujus opposita latera angulum in coni vertice rectum comprehendunt) opposito lateri maneret parallelum; in Cono Acutangulo, lateri opposito occurreret; in Cono autem Obtusangulo, ab eo recederet. Atq; hinc curvas tribus illis sectionibus emergentes, appellabant, Coni Rectanguli, Coni Acutanguli, & Coni Obtusanguli, Sectionem; quibus etiam nominibus utitur Archimedes. Sed & propterea Conisectionum illarum nominibus, solas erectas intelligebant, non item Scalenas; (ut & Diametri nomine, solum intelligebant Axem; &, Verticis Sectionis nomine, axis verticem;) sectiones quippe Scalenas, sive inclinatas, non aliter tractabant quam ut Erectarum portiones; (quod & de Conoidibus pariter intelligendum erit.) Apollonius autem, præter Conum Rectum, etiam Scalenum introduxit, (& forsan primus,) & propterea Coni definitionem ab Euclide traditam (ut quæ soli recto conveniebat) in aliam (quæ etiam Scalenis conveniat) immutavit. Sed neq; solam illam plani secantis positionem (quæ coni latus recte secat, hoc est, ad angulos rectos) sed aliam quamlibet admisit; adeoq; Coni cujuslibet (sive recti sive scaleni) sectionem quamlibet plano utcunq; posito factam, consideravit. Adeoq; & sectionum nomina prius recepta necesse habuit immutare (quippe e Sectionibus tribus quamlibet invenit cuilibet cono inesse, prout planum secans alio atq; alio situ positum intelligatur,) quas igitur alii, Coni

Rectanguli

Rectanguli, Coni Acutanguli, Coni Obtusanguli, sectionem, appellaverant; ille Parabolam, Ellipsem, Hyperbolam, dicendas voluit: quæ nomina ab illius prop: 11, 12, 13, libri primi, originem duxerunt; atq; hactenus a Geometris retinentur. Sed & eidem Sectioni plures Diametros, inesse voluit, prout hujus illiusve coni sectione facta intelligatur; quarum singulæ sibi peculiares habent & vertices, & Ordinatim-applicatas, & Latera-recta. At fatendum interim est horum etiam non pauca, utut aliis nominibus, aliis antea, saltem Archimedi, innotuisse: hoc tamen discrimine, quod quæ *Coni Sectiones* (nempe inclinatæ) ab Apollonio dicuntur, eædem ab Archimede *Sectionis* (erectæ) *Portiones* dici videantur; (& similiter de Conoidibus:) ut in ipsius libro de Rectanguli Coni Sectionis quadratura (cui *de quadratura parabolæ* recentiores nomen fecerunt,) & in libris *de Conoidibus & Sphæroidibus*, passim est videre.

Hæc autem Conicorum doctrina, quamvis ab Apollonio satis Geometrice tradita (unde & *Magni Geometræ* nomen est adeptus,) aspera tamen adhuc mansit & difficilis, ut, qui illam ausus attingere, sit e paucis unus. Unde & nimis neglecta fuit, tanquam insuperabilis difficultatis plena: (Quod quidem eatenus obtinuit, ut ex libris Octo, quos scripserat Apollonius, non nisi primi quatuor ad nostras manus pervenerint;) Maxima quippe Geometrarum pars vel eo non accedebant plane, vel tanquam canis ad Nilum. Eamq; difficultatem quamvis aliquanto minuere conati sint Midorgius, aliiq; , minime tamen sustulerunt. Quam igitur pleriq; cane pejus & angue formidarunt, Conicorum Doctrinam, nos demulcendam suscepimus & levigandam, ut deinceps non minus tractabilis evadat

quam ipſa Euclidis Elementa; nec ſit cur quis in poſterum ipſius aggreſſum metuat. Quod quidem quouſq; præſtiterim, non eſt cur alios quam vos ipſos æquiores putem judices; qui pro ea qua polletis, ut in reliqua literatura, ita ſpeciatim in Matheſi peritia provinciam quam ſuſcepiſtis ornatis maxime.

Opus ipſum quod attinet; videbitis me, ſtatim ab initio, Cavallerii *Methodum Indiviſibilium*, quaſi jam a Geometris paſſim receptam, tam huic quam tractatui ſequenti (qui huic gemellus eſt) ſubſternere; (ut multiplici figurarum inſcriptioni & circumſcriptioni, quibus in ἀπαγωγαῖς aliàs utendum ſæpius eſſet, ſuperſedere liceat:) ſed a nobis aliquatenus ſive emendatam ſive ſaltem immutatam: pro rectis numero infinitis, totidem ſubſtitutis parallelogrammis (altitudinis infinite-exiguæ;) ut et pro planis, totidem vel priſmatis vel cylindrulis: & ſimiliter alibi.

Schemata adhibui quam potui ſimplicia, ne intricatiores linearum ductus confuſionem inferant: & quidem iiſdem ubi fieri commode poſſet repetitis vel parum immutatis uti mallem quam ubiq; novis; quo magis fiant lectori familiaria. In quem etiam finem, iiſdem ut plurimum literis eadem (per totum fere tractatum) puncta deſignamus, utut ſchemata fuerint immutata; atq; iiſdem ſymbolis eaſdem deſignamus ubiq; quantitates: ſed neq; illa fortuito aſſumpta, ſed plerumq; cum delectu, ut ipſe vel literarum vel ſymbolorum intuitus rem deſignatam aliquatenus referat; quæ quamvis non-neceſſaria videri poſſit curioſitas, cum tamen & fantaſiæ & memoriæ adjuvandæ inſerviat, nonnullis forſan erit non ingrata, reliquiſq; ſaltem inoffenſa. In ſymbolis adhibendis, ſecuti ſumus partim D. *Oughtredum* noſtratem, partem D. *Carteſi-*

um

um (nisi velitis potius ut D. *Harriotum* nostratem nominem, qui in eadem fere semita D. *Cartesio* præivit) nonnunquam utrumq; ; prout vel hujus vel illius vel utriusq; notatio præsenti negotio explicando magis videbatur accommoda. Demonstrationes passim ex Arithmeticæ symbolicæ calculo petendas duxi, ut quæ brevitati simul atq; perspicuitati inserviunt maximè, quasq; non minus legitimas esse quam quæ vario linearum implexu fiunt non est cur quisquam dubitet. In toto deniq; operis decursu ea brevitate studuimus omnia præstare quæ perspicuitati non officiat.

Prolixum itaq; de Conicis tractatum non exhibemus ; adeoq; multa ab aliis tradita , nos consulto omisimus, quæ tamen, si opus videbitur, possit quilibet non magno negotio supplere, vel ex nostris deducere. Post enim præcipua fundamenta tradita, non erit difficile reliqua quasi totidem inde consectaria adjungere. Eritq; fortasse tractatus iste vel ipsa brevitate gratior, quam si minutiora sectando factus esset prolixior. Quicquid sit, vestro illud duxi aliorumq; Mathematicorum judicio permittendum. *Valete.*

P
P
1
2
3
4
5
6
7
8
9
1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
2[illegible]



Index ad Tractatum sequentem.

Prooemium.

PROP. PARS I.

PARS II.

[26 De

APPENDIX.



De Sectionibus Conicis

TRACTATUS.

Proœmium.



UUM Sectionum Conicarum (quæ dici ſolent) doctrinam (prout vulgò tradi conſuevit) ſatis obſcuram animadverteram, atq; perplexis admodum Demonſtrationibus involutam: Totum illud negotium paulo attentiùs apud me perpendendum ſtatui; ut ſiquâ poſſem arte rem ſatis intricatam quadantenus extricatiorem darem. Quod & in ſequentibus (Divino favente auxilio) me aliquatenus aſſequutum eſſe confido.

In illum finem, *Conum* ipſum primò (unde, quæ dicuntur, *Coni-ſectiones* ortum trahere exiſtimantur) accuratius paulo conſiderandum duxi; ut inde Coniſectionum originem repeterem, earúmq; affectiones tanquam a vero fonte deducerem; Methodi ſaltem quâ & Apollonius Pergæus, *Magnus Geometra* dictus, & poſt illum tam Veteres quam Recentiores incedunt, fontes apperirem; qui in ipſis Demonſtrationi-

bus non ita ſemper eminent ut ſtatim perſpiciantur, & fortaſſis etiam nonnunquam ſtudio occultantur. Non tamen ea methodo totam Coni-ſectionum doctrinam proſequor; ſed eouſq; ſaltem procedo donec primarias atq; eſſentiales earum affectiones detexerim, ut ipſarum natura atq; eſſentiales characteres innoteſcant, ut inde reliquæ deinceps affectiones calculo deduci poſſint; (Quod etiam in ſequentibus factum eſt.) Atq; hoc quidem præſtitum eſt in propoſitionibus, ſive Sectionibus viginti primoribus. Inſertis interim obiter nonnullis de Conoidibus & Pyramidoidibus (quatenus ſine nimia digreſſione commodè fieri potuit;) & præmiſſis aliquot quaſi Lemmatibus neceſſariis.

Deinde, ſepoſitis quæ a Cono dependent menſuris, aliiſq; in eorum locum ſubſtitutis, quæ Coni-ſectionem ubiq; (ſive in Cono, ſive extra Conum,) comitentur; Coni-ſectiones (vulgò dictas) Cono liberatas atq; exemptas, abſolutè (nullo ad Conum reſpectu habito) conſiderandas ſuſcipio, (totam tractationem quaſi de novo exorſus,) tanquam totidem lineas (ſive figuras) curvas in plano deſcriptas, quæ vel Sectione Coni, vel etiam aliis modis infinitis effici poſſent. Neq; enim Parabola, Ellipſis, aut Hyperbola, a Cono ſecto magis neceſſariò dependent, quàm vel Peripheria vel etiam Triangulum, (quæ quidem & ſecto Cono, & aliis mille modis produci poſſunt.) Ideóq; ſimpliciùs atq; univerſaliùs tradi & poſſunt & debent.

Deniq;, Appendicis loco, ſpecimen exhibere libuit ampliandæ Curvarum doctrinæ; (ſicut &, in progreſſu, Conoideωn & Pyramidoideωn, tam erectorum quàm ſcalenorum, quod tamen nemo, quod ſciam, antea fecerat, doctrinam attigeram; cum antea Conoideωn non niſi rectorum, nec quidem Pyramidoi-

deωn

deων omnino, ratio ulla habita fuerit.) adjunctâ ad calcem novâ, nec ab ullo (credo) antehac tentatâ Paraboloideων speculatione.

Atq; hæc sunt quæ in sequentibus exspectet Lector φιλομαθὴς, brevi quantum potui methodo tradita, nec tamen ea propter obscuritate involuta. Ideóq; prolixam, quam nonnulli affectare videntur, numerosæ Lemmatum & Propositionum seriei, linearibus ubiq; demonstrationibus, sat quidem longis nonnunquam atq; involutis, comprobatorum, pompam diffugiens; ipsas ut plurimum non modò ἐκθέσεις, sed & ἀποδείξεις (ubi id levi commonitione tanquā in transitu præstari possit, nec Propositionis seriem nimis conturbet) ipsis Propositionibus inserui, brevitati simul & perspicuitati consulens: Demonstrationibus etiam (eâdem de causa) potius ex Arithmetico calculo petitis (Arithmeticam *speciosam* intellige) rem agens, quàm linearibus; cùm illæ nec minùs scientificæ sint, & magis perspicuæ, sed et simpliciores sunt atq; magis universales, nec quisquam est (quod sciam) qui Demonstrationes Arithmeticas in Geometria admittendas negaverit; & quidem (præterquam ubi de Angulis aut Inclinationibus agitur, alióve aliquo situ locali, aut quæ immediatè hinc dependent,) non video quorsum linearibus ductibus in demonstrando admodum opus sit, cùm ea omnia quæ ex Rationibus sive Proportionibus ordinandis, alternandis, invertendis, convertendis, componendis, dividendis, addendis, auferendis, &c. dependent, non magis Geometrica sint quàm Arithmetica, ne dicam potius purè Arithmetica, quanquam (ut Arithmetica omnia) tam rei Geometricæ quàm aliis etiam disciplinis Mathematicis sæpissimè immisceantur.

His Præmonitis, rem ipsam aggredior.



PARS PRIMA.

PROP. I.

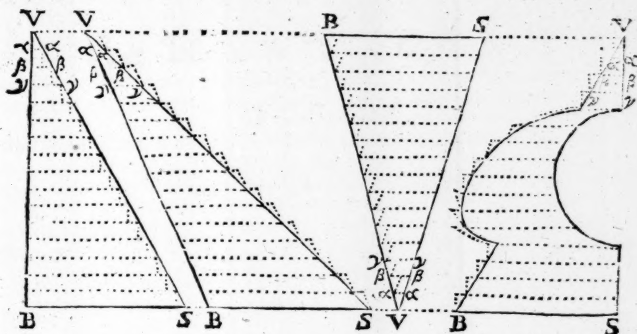
De Figuris planis juxta Indivisibilium methodum considerandis.



Uppono in limine (juxtâ Bonaventuræ Cavallerii *Geometriam Indivisibilium*) Planum quodlibet quasi ex infinitis lineis parallelis conflari: Vel potiùs (quod ego mallem) ex infinitis Prallelogrammis æquè altis; quorum quidem singulorum altitudo sit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, sive aliquota pars infinite parva; (esto enim ∞ nota numeri infiniti;) adeóq; omnium simul altitudo æqualis altitudini figuræ.

VTrovis autem modo res explicetur (sive per infinitas lineas parallelas, sive per infinita parallelogramma æquè alta infinitis illis lineis interjecta) eodem res redibit. Nam Parallelogrammum cujus altitudo supponitur infinite parva, hoc est, nulla, (nam quantitas infinite parva perinde est atq; nonquanta,) vix aliud est quàm linea (In hoc saltem differunt, quòd linea hæc supponitur dilatabilis esse, sive tantillam saltem spissitudinem habere ut infinitâ multiplicatione certam tandem altitudinem sive latitudinem possit acquirere, tantam nempe quanta est figuræ altitudo.) Nos igitur deinceps (partim quod ille mos loquendi in Cavallerii methodo de *Indivisibilibus* videatur obtinuisse, partim etiam ut brevitati consulamus) Linearum potiùs quàm Parallelogrammorum nomine partes illas figurarum infinite exiguas (sive altitudinis infinite exiguæ) nonnunquam appellabimus, quando saltem determinatæ

natæ altitudinis consideratio non habetur; Ubi autem deter-



minatæ altitudinis instituetur consideratio (quod aliquando fiet) exiguæ illius altitudinis eousq; ratio habenda erit, ut ea infinities multiplicata totam figuræ altitudinem supponatur adæquare.

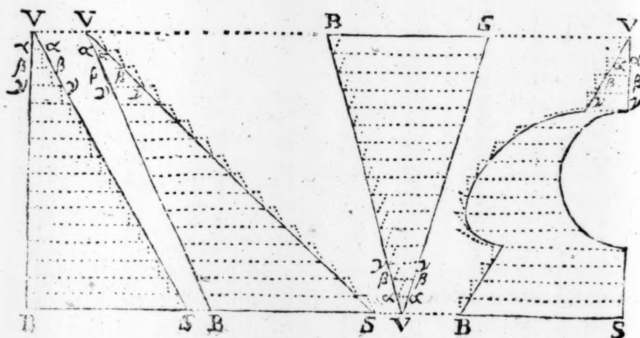
Quod autem de Lineis & Parallelogrammis perinde nominandis, dictum est, intelligendum etiam erit de Circulis & Cylindrulis, vel etiam de Planis quibusvis & Prismatibus super illa plana constitutis: dummodo supponantur tantam sive crassitiem sive altitudinem habere quanta est $\frac{1}{\infty}$ *altitudinis illius figuræ quam constituunt.* Nam Cylindrus nullius altitudinis, vel infinite exiguæ, quid aliud, est quam Circulus? & Prisma, altitudinis vel nullius vel infinite exiguæ, perinde atq; Planum tractari poterit. Atq; hoc jam statim ab initio monendum esse duxi, ne sæpius illud deinceps repetere necesse foret.

PROP. II.

De *Triangulo.*

SI Triangulum rectâ, basi parallelâ, secetur, erit abscissum Triangulum secto simile; & propterea latera habebit proportionalia (ut notum est.

est.) Adeóq; , si Triangulum quodvis V B S, rectis quotcunq; αα, ββ, γγ, &c. basi B S parallelis, & æqualiter ab invicem dissitis, secetur; quæ propterea Crurum utrumvis (adeóq; & utrumq;) dividant in segmenta æqualia, (& propterea etiam totum Triangulum in segmenta æquè alta:) erunt illæ rectæ αα, ββ, γγ, &c. Arithmeticè proportionales: (sunt enim inter se αα, ββ, γγ, &c. ut Vα, Vβ, Vγ, &c. hoc est, ut 1, 2, 3, &c. propter æquales excessus Vα, αβ, βγ, &c.) Ideóq; si rectæ illæ supponantur numero infinitæ, erit omnium series, (hoc est, totum Triangulum, per prop. præced.) aggregatum rectarum numero infinitarum A-



rithmeticè proportionalium, quarum minima est punctum V (verticis nimirum) maxima verò est B S basis Trianguli.

Atq; idem continget si infinitis illis rectis supponamus totidem Parallelogramma in eodem plano interjici, quorum singulorum altitudo sit $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Trianguli: Erunt scilicet & illa Arithmetice proportionalia. Cùm enim æque-alta sint, sunt & basibus proportionalia.

Hæc

Hæc autem omnia Parallelogramma simul sumpta, figuram constituent Triangulo illi sive inscriptibilem sive circumscriptibilem, (cùm omniũ bases supponantur Triangulo aptari:) quò autem plura sunt (in ejusmodi figurâ inscripta vel circũscripta) Parallelogrãma, eò minori sive excessu sive defectu differt figura illa a Triangulo cui adscribitur; adeóq; cùm supponantur infinita, erit differentia illa infinite exigua, hoc est, nulla: atq; propterea supponenda ea figura sic adscripta (ex Parallelogrammis infinitis Arithmetice proportionalibus conflata) Triangulo æqualis, seu potiùs eadem: Eadem quidem lege qua Polygonum regulare infinitorum laterum (sive inscribi supponatur sive circumscribi) pro Circulo haberi solet.

Quod si quispiam sit qui noluerit hoc concedere, poterit ille notissima methodo Apagogica cogi: multiplicatis nempe eousq; Parallelogrammis, ut differentia tandem quavis assignatâ quantitate minor sit. Ego verò ejusmodi ἀπαγωγαῖς supersedendum esse existimo, partim ne Lectori nauseam crearem ejusmodi cramben sæpiùs iterando, partim quia nemo est in Mathematicis paulò exercitatior, qui non poterit (si ipsi opus esse videatur, tantiq; supersit otii) supplere, cùm ea Methodus demonstrandi tam apud Veteres quam Recentiores passim occurrat.

Quod autem de Triangulo jam dictum est, illud nempe figuræ ex infinitis Parallelogrammis conflatæ (sive inscriptæ sive circumscriptæ) æquale esse, seu potius eandem figuram; intelligendum erit de quâvis aliâ figurâ planâ; cùm eadem sit in omnibus demonstrandi ratio. *Nec quidem Planis solummodo, sed & figuris Solidis illud convenit: si nempe pro Parallelogrammis substituamus Prismata:* (qua voce etiam Cylindrulos comprehendi volo, aut etiam ejusmodi quasvis figuras inter parallela plana similia, sive rectilinea sint sive curvilinea sive mista, æquabiliter positas; ne longis verborum ambagibus utendum sit.) Atq; hoc semel moneo, ne quis deinceps novas Demonstrationes exspectet, quoties idem de aliis figuris dicendum occurret.

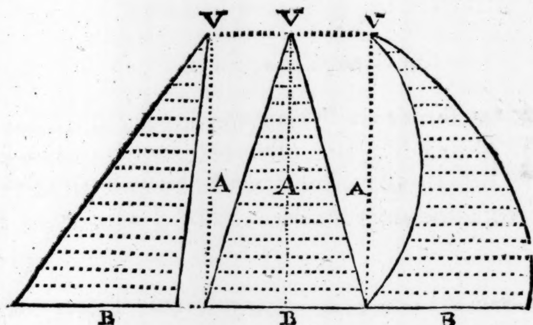
PROP.

PROP. III.

De Areâ Trianguli.

CUm Triangulum constet ex infinitis sive lineis, sive Parallelogrammis, Arithmeticè proportionalibus, a puncto inchoatis & ad basin continuatis, (ut patet ex jam dictis:) Erit Area Trianguli æqualis Basi in Altitudinis semissem ductæ.

Est enim notissima apud Arithmeticos regula; *Summam Arithmeticæ progressionis, sive omnium quotcunq; terminorum aggregatum, æ-*



quari aggregato extremorum in semissem numeri terminorum ducto. Adeóq;, si terminus minimus supponatur O, (prout hîc supponitur, tantundem enim valet punctum in magnitudine atq; o Ciphra in numero;) idem erit extremorum aggregatum atq; ipse terminus maximus. Altitudinem verò figuræ, pro numero terminorum in Progressione, substituo, hac de causa, Quoniam cũ numerus terminorum supponatur ∞, erit omnium longitudinum aggregatum $\frac{\infty}{2}$ Basis, (quia Basis jam est extremorum aggregatum;) cùm autem cujuslibet (lineæ vel parallelogrammi) crassities sive Altitudo supponatur $\frac{1}{\infty}$ Altitudinis triangu-

li,

li, & in illam tota longitudinum ſumma ducenda eſt; adeoq; $\frac{1}{\infty}$ A in $\frac{\infty}{2}$ B erit area. Eſt autem $\frac{1}{\infty}$ A $\times$ $\frac{\infty}{2}$ B $= \frac{1}{2}$ A B. Adeò ut A (figuræ altitudo) non ſolum longitudinum numerum, ſed eundem in communem omnium altitudinem ductum, exhibeat; quæ quidem communis altitudo tantò minor ſupponenda eſt, quanto termini ſeu longitudines ſunt plures.

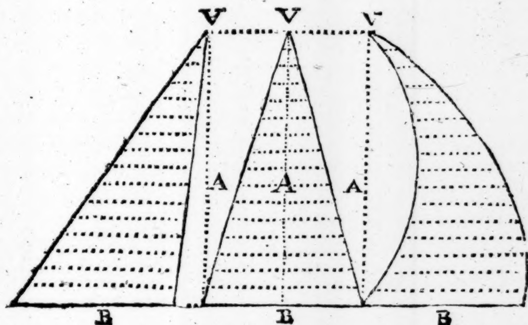
Notandum autem eſt, *Hoc non ſolummodo in veris Triangulis (rectilineis) valere; ſed & idem pariter evenire quamvis crura ſint vel curvilinea, vel quomodocunq; a rectitudine diſtorta, modo rectæ omnes baſi parallelæ ſint ſuis a vertice diſtantiis proportionales, adeoq; inter ſe Arithmeticè proportionales.* Ejuſmodi vero figuram, cum ſit Trianguli inſtar, *Triangulum diſtortum, luxatum*, aut *deformatum*, licet appellare.

PROP. IV.

De Triangulis æquè altis.

Hinc ſequitur; Triangula ſuper æqualibus baſibus æquè-alta, (ſive rectangula ſint ſive obliquangula, ſive item ſint æquicrura ſive ſcalena, ſive quocunq; modo luxata,) eſſe inter ſe æqualia.

Cùm enim in calculo nulla angulorum ſitûsve habeatur



ratio, sed Basis solummodo & Altitudinis; modo de his constet, constabit etiam de area Trianguli.

Quod autem de Æqualitate dictum est, facile potest etiam Proportionalitati accommodari. Quod & sæpius deinceps erit intelligendum.

Has vero duas de Area Trianguli Propositiones, non ideo hic inserendas judicavi, acsi novum quid aut inauditum in se contineant, (quis enim hæc nescit?) sed ut via sternatur consimili argumentationi in aliis figuris sive planis sive solidis. *Si enim æquales sint tam bases quam altitudines, omniaq; intermedia (sive Parallelogramma sive Prismata) eâdem ratione vel crescant vel decrescant, æquales etiam erunt figuræ quamvis earum altera erecta sit altera vel inclinata vel quocunq; modo luxata.* Nam cùm infinitæ partes unius infinitis partibus alterius sigillatim æquentur, (quanquam fortassis in alio situ reperiantur,) erunt & aggregata æqualia.

Atq; hoc quidem semel & universaliter monstrasse sufficiat, ne varias deinceps propositiones particulares, citra necessitatem, multiplicare cogar.

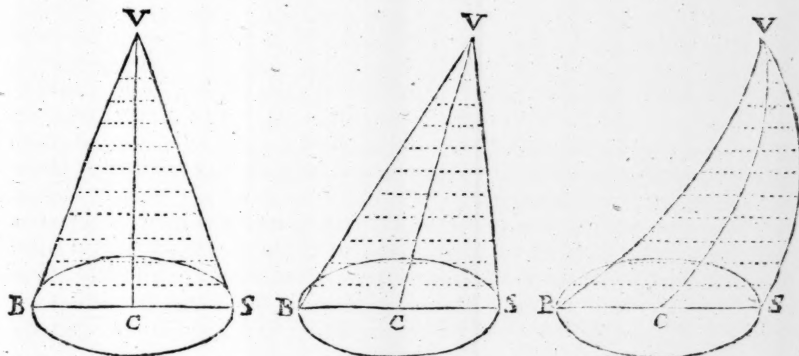
PROP. V.

De Cono.

SI infinitæ Rectę parellelę ex quibus conflari supponitur Triangulum, fiant totidem Circulorum parallelorum diametri; formabitur figura solida qui *Conus* dicitur.

Rectáq; a Trianguli vertice V (qui & *Coni Vertex* est) ad Basis B S punctum medium ducta, puta V C, (quam *Trianguli Diametrum* vel *Axem* libet appellare) bisecabit etiam reliquas Trianguli rectas basi parallelas (totúmq; triangulū) adeóq; per singulorum circulorum parallelorum centra transibit; erítq; propterea *Axis Coni*; Triangulúmq; expositum, V B S, per Axem Coni transiens, ipsum Conum ejúsq; parallelos

los Circulos bisecabit: Circulúsq; ille cujus diameter est basis Trianguli, *Coni Basis* dicetur.



Conus autem sic formatus, si tam expositi Trianguli Crura sint æqualia, quàm circulorum plana plano Trianguli recta, erit *Conus Rectus*, (utpote cujus Axis est Basi perpendicularis, qui propterea *Axis Rectus* dici solet;) si verò vel altera vel alterutra illarum conditionum desit, (puta si vel expositum Triangulum sit inæquicrurum, vel plana circulorum plano Trianguli obliquè insistant,) erit *Conus Scalenus*, hoc est inclinatus vel obliquatus, (cujus nempe Axis *Basi* obliquè insistit, atq; *Axis Obliquus* dici solet.) si vero Triangulum Distortum fuerit, fiet & *Conus Distortus*, non verus Conus.

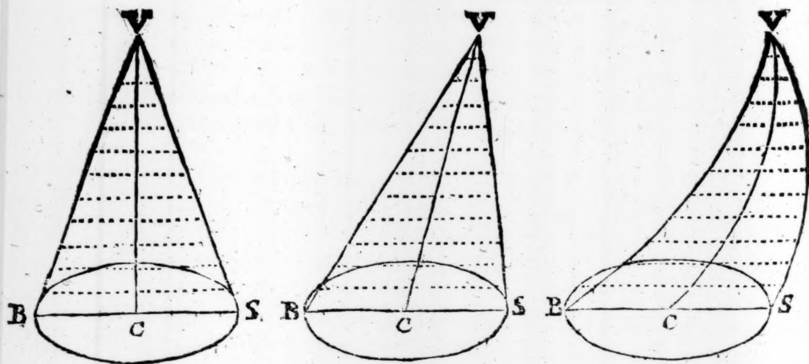
Prout autem Triangulum potest (productis infra basin cruribus) in infinitum continuari; ita & Conus pari modo continuandus supponitur.

Atq; etiam, sicut (continuatis, post decussationem, Trianguli cruribus supra verticem) aliud formari potest

test κατὰ κορυφὴν Triangulum (quod *Triangulum oppositum* appellamus,) ita et *Oppositum Conum* formari supponendum est.

Pleraq; in propositione (præterquam quod Definitiones sint) per se satis patent, nec ulteriori egent Demonstratione. Unicum opus est ut ostendam, nempe *Figuram solidam sic formatam*, (si Conum Distortum eximas,) *talem Conum esse qualem definit Apollonius*: Vel, quod idem est, Parallelos circulos coni nostri parallelis Circulis coni Apollonii congruere. Quod quidem verum est.

Nam (propter parallelismum Circulorum, adeóq; & eorum Diametrorum in eodem plano existentium, istasq; Diametros distantiis a vertice proportionales,) si latus alterutrum, expositi Trianguli per axem, puta VB circumferatur secundum circuli unius (puta Basis) Peripheriam transibit eti-



am per Peripherias reliquorum, Radiorum extremitates lambens (qui ubiq; sunt distantiis a vertice proportionales & basis radio paralleli, adeóq;, durante tota circumductione, triangulo quod Axe trianguli expositi, recta circumducta, & basis radio comprehenditur, ubiq; accommodatur) totámq; figuram describet.

describet: Quæ est Apollonii constructio Coni. Conus igitur a nobis formatus idem est cum Apollonii Cono: Quod erat ostendendum.

Atq; hinc etiam sequitur, *A vertice ad quodvis superficiei Conicæ punctum rectam duci posse.*

Recordandum interim est, (quod supra universaliter monuimus) sicut lineis trianguli, ita planis Coni, aliqualem crassitiem concedendam esse, quanta nempe est $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Coni: vel, quod idem est, Circulorum appellatione, cylindrulos numero infinitos, tantæ quidem altitudinis, super circulis illis constitutos intelligendos esse; qui igitur solidum ex infinitis cylindrulis cono vel inscriptum vel circumscriptum supponuntur constituere; quod solidum idem esse cum cono, eodem argumento concluditur quo usi sumus de Triangulo, Prop. 2.

Coni autem *Altitudo*, mensuratur perpendiculo a Vertice ad planum Basis demisso; adeóq; eadem est cum altitudine Trianguli, si circuli sint triangulo recti, (erit enim perpendiculum illud in ipso trianguli plano, adeóq; ipsius etiam basi, saltem productæ, perpendicularis, ejus altitudinem metiens;) sin secus, minor erit; tunc enim perpendiculum ad basin trianguli demissum, erit ad Coni basin obliquum, adeóq; majus perpendiculo altitudinem Coni metiente.

Notandum tamen insuper est, Conum formari posse, non modo si expositi Trianguli rectæ parallelæ, sint circulorum Diametri, verum etiam si circulis (vel quidem similibus Ellipsibus) alio quovis modo similiter aptentur; (quod, si opus sit, facile est demonstratu; nos autem obiter tantùm monemus:) Verùm, eo casu, Triangulum illud non necessario per Axem Coni incedet, neq; ea omnia consequentur symptomata quæ hinc dependent.

Si verò, pro Circulis, substituantur totidem Figuræ rectilineæ, (aliæve vel curvilineæ vel mistæ, præter circulos & Ellipses,) non quidem Conus, sed saltem *Pyramis* emerget: Cui & ea omnia facilè accommodari possunt (mutatis mutandis) quæ de Cono (hoc est, Pyramide rotundâ) diximus. Pyramidis autem nomen hic latiori sensu accipiendum volo, quàm ut solis figuris rectilineas bases habentibus conveniat; ita nempe ut bases planas quascunq; admittat, (sicut & de Prismate supra di-

ctum est ad Prop. 2.) ne scilicet longis verborum Ambagibus utendum esset. Adeóq; -- --

PROP. VI.

De Pyramide.

P*Yramidis* voce (sub quâ & Conum comprehendo,) intelligo Figuram solidam ex infinitis planis circa eundem Axem rectilineum ordinatim-positis conflatam; quorum omnium crassities supponuntur invicem æquales (nempe $\frac{1}{\infty}$ altitudinis figuræ solidæ,) diametri verò (vel homologa latera, aut etiam rectæ quævis similiter positæ) distantiis a vertice proportionales; adeóq; ipsa plana in duplicatâ ratione distantiarum a vertice. (sicut & *Prismatis* nomine intelligo ejusmodi planorum aggregatum invicem æqualium.)

Si autem Pyramis plano per verticem secetur; manifestum est plana similia (parallela) similiter secari; communes ergo sectiones (planorum secantis & sectorum) sunt infinitæ rectæ arithmetice proportionales (nempe, in subduplicata ratione figurarum, hoc est, in ratione distantiarum a vertice) adeoq; omnium aggregatum erit triangulum; per Prop. 2.

Axem vero Pyramidis (ut & Prismatis) appello, Lineam a vertice ductam, similium planorum parallelorum omnium centra conjungentem. *Plana* vero ad Axem *ordinatim posita*, appello, quæ parallela, & similia similiterque posita, centra habent in axe.

Si verò, vel quòd triangulum, unde formari supponitur Pyramis, non sit rectilineum, (sed curvilineum, seu quocunq; modo deformatum,) aut ob aliam quamlibet rationem, Planorum, centra non sint in eâdem rectâ; vel ipsa plana circa eundem

dem Axem non sint similiter posita, (sed spirali putà, vel alio quovis modo distorta;) modò interim plana sint similia & æqualiter crassa, debitamq; ad invicem rationem retineant; *Pyramis luxata, distorta,* vel *deformata* dici potest. (Quæ etiam de Prismate, aliisq; figuris solidis, pariter intelligenda sunt.) Lineaq; omnium centra conjungens (si recta non sit) *Axis distortus* dici potest.

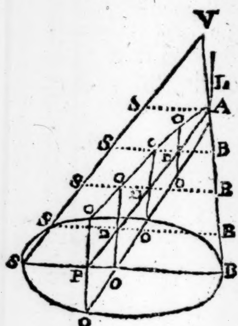
PROP. VII.

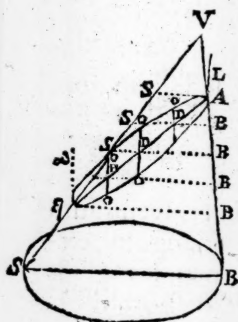
De Coni Sectione.

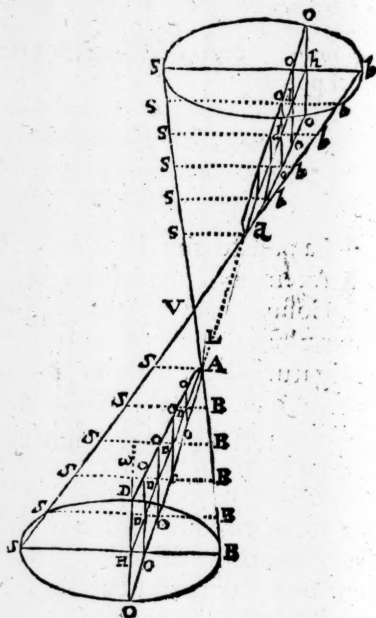
SI a puncto quovis, ut A, in Trianguli VBS (per Axem coni incidentis, & circa quod supponitur Conus formari) utrovis Crure, recta ducatur Triangulum secans (puta AP, AE, AH;) super quam intelligatur Planum plano Trianguli ita insistere, ut aliquem ex parallelis Coni circulis (si saltem ipsis parallelum non sit) secet secundum rectam OO, quæ sit istius circuli diametro puta BS, (in triangulo VBS exsistenti) perpendicularis, (adeoq; & reliquos quos secat circulos isti parallelos secet secundum rectas ipsorum diametris in eodem triangulo exsistentibus perpendiculares, quæ propterea & ipsi OO parallelæ erunt; ut statim demonstrabitur :) communis Sectio superficierum Coni, planiq; secantis (puta OAO,) *Sectio Conica* vel *Coni-Sectio*, dici solet: Estq; quidem vel Parabola, vel Ellipsis, vel Hyperbola: Nempe *Parabola*, si recta sic ducta sit reliquo cruri parallela (adeoq; nusquam ipsi, quantumvis utrinq; producatur, occurrens) ut AP: *Ellipsis* vero, si recta sic ducta ad crus oppositum vergat, (adeoq; ipsi, saltem producto, sit infra verticem occursura,) ut AEa: *Hyperbola* deniq; si recta sic ducta ab opposito crure recedat, ut AH,

(quæ

(quæ igitur ex contraria parte producta opposito cruri supra verticem continuato, occurret, puta in a.)







Punctum autem A, coni-Sectionis *Vertex* dicitur; & quidem A, a, (in Ellipsi & Hyperbola) *Vertices oppositi.* Rectæq; AP, AE, AH, coni-sectionum *Diametri*, (nempe AP Parabolæ, AE Ellipsis, AH Hyperbolæ:) ipsaq; A a (Ellipseos vel Hyerbolarum) *Diameter transversa*: (idem nempe planum quod Hyperbolam in uno aliquo cono efficit, cum etiam ad Oppositum Conum pertinget, *Oppositam Hyperbolam* ibidem efficit.) Rectam autem OO, reliquasq; ipsi in eadem Con-sectione parallelas

parallelas, (totidem parallelis in Cono circulis, & Coni-sectioni communes,) *Ordinatim-subtensas*, sive *Ordinatim inscriptas*, appello: quæ, cum sint circulorum diametris perpendiculares, (ut constructio postulat,) ab ipsis bisecantur, adeoq; & a Coni-sectionis Diametro, (quæ nempe per eadem bisectionum puncta transit;) Earúmq; semisses, ut DO, diametro Coni-sectionis *Ordinatim-applicatæ* dicuntur; suntq; inter bina diametri circularis (cui perpendiculariter insistunt) segmenta, BD, DS, mediæ proportionales: Quæ quidem si diametro Coni-sectionis AD, ad angulos rectos insistant, Diameter illa *Axis* dici solet (qui suis ordinatim-applicatis est perpendicularis;) sin minus, saltem Diameter, vel *Diameter Obliqua* vel *inclinata* dici solet.

Ut autem Conus ipse, sic & Coni-sectiones (Parabolam intellige & Hyperbolam, nam de Ellipsi secus est,) simul cum Cono in infinitum continuandæ supponuntur.

Quod autem *Planum Coni-sectionem efficiens, si unam ex parallelis Coni circulis secet secundum rectam OO, ipsius diametro BS perpendicularem, etiam reliquos illi parallelos quos secat circulos secabit secundum rectas quæ ipsorum diametris ipsi BS parallelis sint perpendiculares*: Sic demonstrabitur. Cùm circuli supponantur paralleli, erunt & eorum sectiones OO, OO, (eodem plano factæ) parallelæ, (per 16 e 11.) quæ propterea cum parallelis circulorum diametris (BS, BS,) eosdem angulos faciunt, (per 10 e 11.) ponitur autem, angulos ad diametrorum parallelarum unam rectos esse; ergo & ad omnes; Quod erat demonstrandum.

Reliqua in Propositione vel Definitiones sunt, vel ex propositionis curriculo satis patent.

Monendum autem est *Parabolæ*, *Ellipsis*, & *Hyperbolæ* appellationibus, apud Geometras, (quâ igitur libertate & nos aliquando usuri sumus,) nonnunquam curvas *lineas* in superficie

conicâ factas, (quas in propoſitione definivimus,) nonnunquam verò *figuras planas* ejuſmodi curvis terminatas, intelligi. Siquando autem de ambiguitate ſignificationis metuatur, non incommodum erit *lineæ* vel *plani* vocem adjungere; ut *linea Parabolica*, *planum Parabolicum*, &c.

Monendum eſt etiam, ſub *Ellipſeos* nomine (quod tamen alii non ſolent) me etiam *Peripheriam Circuli* comprehendere, (vel etiam ipſum Circulum.) Circulus enim ab Ellipſi (figuram intellige lineâ Ellipticâ comprehenſam) non aliter differt quam ut Quadratum a Parallelogrammo. Nam ut *Parallelogrammum* cujus latera ſunt æqualia anguliq; recti, vel (ſi libet) cujus diametri conjugatæ ſunt æquales & ad angulos rectos, (habent enim & figuræ rectilineæ ſuas diametros, quanquam non ut curvilineæ infinitas, ſuiſq; diametris ordinatim-applicatas; & quidem Parallelogrammum diametrorum habet duo paria, nempe duas diagonales, & duas lateribus parallelas ſe mutuo biſecantes; tam illæ autem quam hæ ſunt conjugatæ:) eſt *Quadratum*: Sic *Ellipſis*, cujus diametri conjugatæ ſunt æquales & ad angulos rectos, *Circulus* eſt. Et quidem ea omnia quæ Ellipſibus univerſaliter conveniunt, conveniunt etiam circulis, (non minùs quàm quæ Parallelogrammis conveniunt, conveniunt Quadratis,) niſi quod Ellipſeos appellatio non ſoleat illis attribui. Sicui noſtra hæc phraſiologia non placeat, fruatur ſuo ſenſu; modò ſciat, quid apud me Ellipſeos nomine ſignificetur; quod neceſſariò monendum erat, ne dicta noſtra perperam intelligantur.

Monendum inſuper eſt, Quod ea omnia quæ jam expoſuimus de uno Triangulo-per-axem, unde Conum formari ſupponimus, pariter intelligenda ſunt de infinitis aliis Triangulis Conum per axem dividentibus. Poteſt enim ſuper eorum quodvis ejuſmodi formatio Coni ſupponi. Manentibus enim eiſdem centris, diſtantiis, & planis, iidem formantur circuli, quamvis aliæ atq; aliæ ſumantur Diametri, hoc

eſt,

eft, quamvis alio atq; alio triangulo Conus per axem dividatur. Verbi gratiâ, Triangulo $V\beta\sigma$ (per axem etiam transeunti) eadem conveniunt quæ ipſi VBS convenire diximus.

Non tamen hæc ita intelligenda ſunt, acſi quocunq; Triangulo-per-axem accepto, eadem numerica Coni-ſectio, methoda jam dictâ, formaretur: Sed ſaltem quocunq; Triangulo-per-axem accepto, puta $V\beta\sigma$, fieri poteſt ut illi accommodentur coni-ſectiones eodem modo quo ipſi VBS. Quamvis enim verum ſit, quòd Coni-ſectionis OAO, aliquod punctum, ut α, ſit in crure $V\beta$; attamen planorum OAO, OBO, communis ſectio OO, non erit trianguli $V\beta\sigma$ baſi $\beta\sigma$ perpendicularis (quod in Coni-ſectionis geneſi, in propoſitione traditâ ſupponitur;) ſupponitur enim perpendicularis eſſe alii ejuſdem circuli Diametro BS, rectam $\beta\sigma$ ſecanti; non igitur & ipſi $\beta\sigma$ perpendicularis eſſe poteſt.

At interrogabit fortaſſe quiſpiam, Quid cauſæ ſit, cur illud poſtuletur ut recta OO (circulo & Coni-ſectioni communis) ſit circuli diametro BS (in triangulo VBS exiſtenti) perpendicularis? Annon enim, ſi planum ſecans ad triangulum-per-axem aliter inclinaretur, ſecaret ſuperficiem Coni? Omnino. An verò ea ſectio non una eſſet ex eis quas definivimus? Eſſet omnino. Cur igitur illa ſola inclinatio plani-ſecantis ad triangulum-per-axem admittitur, quæ rectam OO rectæ BS, perpendicularem efficiat? Reſpondeo; Quod alia quævis inclinatio non minùs quidem ſufficeret ad Coni-ſectionem aliquam efficiendam: ſed minùs apta eſſet ad Demonſtrationes inſtituendas; cùm hæ plerumq; ſupponant rectam OO, eíq; parallelas, a circulorum diametris biſecari, quòd non fieret niſi diametris illis eſſent perpendiculares. Ideóq; cùm Planum Coni-ſectionem efficiens ad varia triangula-per-axem variam inclinationem habeat, illud ex omnibus triangulum ſeligunt Conicorum ſcriptores ad cujus baſin rectæ illæ OO ſunt perpendiculares. Unum enim aliquod triangulum per-axem (& quidem unicum) illud patitur (niſi forſan coni-ſectio propoſita unus ſit ex circulis baſi parallelis) quomodocunq; Conus a plano ſecetur.

Quodnam autem ex omnibus illud ſit, ſic inveſtigatur; ſi, verbi gratiâ, Conus VBO, plano ſecetur faciente Coni-ſectionem

OAO, unum aliquem ex parallelis circulis OBO secante in OO: Ducatur in OBO circulo, diameter ipsi OO perpendicularis, quæ sit BS, & compleatur Triangulum VBS. Patet enim Planum Coni-sectionem efficiens, triangulo VBS ita insistere, (puta in AD, quæ propterea Coni-sectionis diameter erit,) ut circulum OBO secet secundum rectam OO ipsius Diametro BS (quæ & Trianguli VBS basis est) perpendicularem, quod erat faciendum, Triangulum igitur VBS illud est, secundum quod Conisectionis OAO natura & proprietates sunt perpendendæ (si autem non ipsa BS, sed alia aliqua, puta $\beta\sigma$, fuisset ipsi OO perpendicularis; tum non Triangulum VBS, sed V$\beta\sigma$, seligendum esset.)

Et quamvis aliunde quidem verum sit (ut suo loco dicetur) alias Diametros (aliósq; propterea vertices) conisectioni OAO convenire; sola tamen AD ea est quæ dici solet *Diameter ex generatione*; intellige, prout jam huic Cono applicatur: Nam revera eadem Coni-sectio potest vel alii forsan Cono, vel etiam huic in alio situ, ita accommodari, ut alias habeat Diametros-ex-generatione.

Atq; hæc quidem ad pleniorem propositionis intelligentiam monenda duxi.

Sed & ulterius monendum est; quod, *quum diximus Punctum A in utrovis Trianguli crure, puta VB, ubivis assignari posse; Vel excipiendum erit punctum Verticis V; vel, pro Coni-sectione exspectata, prodibit aliquid simplicius*; eò nempe quod una saltem quantitatum ex quibus Coni-sectio dependet, evanescet in nihilum seu nonquantum. Nam, verbi gratia, si punctum A assignetur in cruris VB puncto V, & velim Parabolam describere; recta AP (quæ ducenda erat parallela) cum ipsa VS coincidet; adeoq; rectæ SD evanescent, & propterea evanescent ordinatim-applicatæ DO, (nam si altera multiplicantium sit o ciphra, erit & quantitas producta o ciphra:) adeóq; Parabola prodiret nullius latitudinis, hoc est, linea recta, terminata quidem ex parte A vel V, infinita verò ex parte P, vel O: (coincident enim puncta P, O, propter nullitatem ordinatim-applicatarum PO, vel DO.) Eodem modo, si describenda sit Ellipsis; Posito puncto A in V, (ubicunq; in crure VS supponatur a,) propter coincidentiam punctorum A, V, coincident etiam rectæ Aa, Va; ideóq;, evanescentibus rectis DS, evanescent etiam

DO;

D O, eritq; propterea Ellipsis nullius latitudinis, hoc est, linea recta, utrinq; quidem terminata; (saltem nisi & punctum a in cruris V S puncto V assignetur; quo casu, propter coincidentiam punctorum A, a, recta illa degenerabit in unicum punctum.) Pari modo, si describenda esset Hyperbola; posito, ut prius, puncto A in V, (ubicunq; assignetur H,) recta H A a crus utrumq; V B, V S, eodem puncto V, secabit; adeóq; transversa diameter A a (propter coincidentiam punctorum A,a,V, evanescet; adeóq; Hyperbola in Triangulum degenerabit, (ut ex Hyperbolæ doctrinâ postea tradenda colligi poterit, interim idem satis patet ex dictis Prop. 6.) Saltem nisi recta

A H eousq; recedat a crure V S, ut ipsi V B coincidat; quo casu, (sive A assignetur in vertice V, sive ubivis aliàs in crure

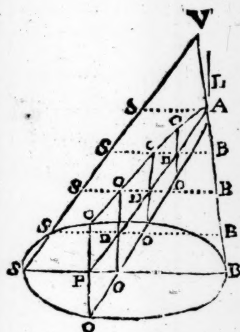
VB,) evanescent rectæ DB, adeóq; & DO; & pro Triangulo vel etiam Hyperbola OVO vel OAO, prodibit linea recta, ex unâ quidem parte terminata, ex reliqua vero infinita.

PROP. VIII.

De Parabolâ, Sectione Coni factâ.

IN Parabola, Quadrata Ordinatim-applicatarum sunt interceptis- Diametris proportionalia.

Quadrata nempe ordinatim-applicatarum PO, DO, &c. sunt rectis PB, DB, &c. (in triangulo APB parallelis) proportionalia, (adeoq; & *interceptis Diametris*, hoc est, diametrorum segmentis inter ipsas ordinatim-applicatas & verticem interceptis, PA, DA, &c.) æqualia quippe rectangulis BPS, BDS, &c. quæ propter æquales PS, DS, &c. (in parallelogrammo APS) sunt æque alta, & propterea basibus (PB, DB, &c.) proportionalia.



Adeoq; ipsæ ordinatim-applicatæ sunt in subduplicata ratione Diametrorum interceptarum; nempe in subduplicata ratione suorum quadratorum.

Si igitur ordinatim-applicatæ quotlibet æqualibus ab invicem distantiis sumantur; erunt earum quadrata in continua progressione Arithmetica, (ut patet ex dictis ad Prop. 2.)

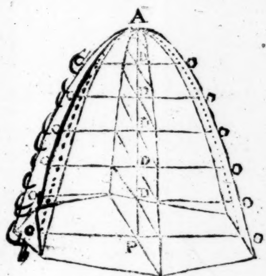
Constabit igitur (per Prop. 1.) semiparabolæ planum (adeoq; & totius Parabolæ) ex infinitis lateribus quadratorum Arithmetice proportionalium.

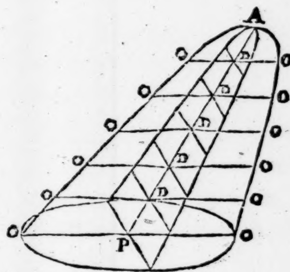
PROP.

PROP. IX.

De Conoide, & Pyramidoide Parabolico.

H*Inc ſequitur*; Si ex omnium in Parabola ordinatim applicatarũ quadratis, ad communem axem ordinatim poſitis, formetur *Pyramidoides Parabolicum* (eo modo quo Prop. 5, 6. formavimus Pyramidem & Conum) erit illud infinitorum planorum Arithmetice proportionalium aggregatum, (ſicut Triangulum rectarum,) ab o incipiendo & continue progrediendo ad baſin uſque.





Cælatoris incuria error admiſſus eſt; nam pyramidoidis baſis ſupponitur ſexangula (novi ſeptangula) & recta OPO baſis eſſet Parabolæ punctuatæ.

Adeoq; ſi Baſis figuræ ſic conſtructę in ſemiſſem Altitudinis ducatur, prodibit totius figurę ſoliditas: (eodem argumento quo uſi ſumus de triangulo Prop. 3.)

Cumq; idem (eodem argumento) valeat de circulis, aliiſve figuris planis ſimilibus quibuſcunque, (ſunt enim ad invicem, ut diametrorum, vel rectarum quarumlibet ſimiliter ductarum, quadrata;) erit univerſaliter *Conoides vel Pyramidoides Parabolicum*, quacunq; baſe, (ſive etiam erectum ſit, ſive ſcalenum, ſive etiam quocunq; modo luxatum, per ea quę dicta ſunt Pr. 4.)

æquali

æquale basi in semissem altitudinis ductæ; hoc est, *Semissis Prismatis* (ut parallelogrammi Triangulum,) *super eadem basi æque-alti.*

Est enim (ex dictis) *Pyramidoides Parabolicum* (sub quo & Conoides comprehendo) Aggregatum planorum similium numero infinitorum Arithmetice proportionalium (ab o continue progrediendo,) circa eundem axem rectilineum ordinatim-positorum; quorum quidem singulorum crassities supponitur æqualis $\frac{1}{\infty}$ altitudinis totius figuræ solidæ.

Quæ supra Prop. 5, 6. De Pyramide & Cono, eorúmq; altitudinibus, axibus, planisq; ordinatim-applicatis; item de Pyramidibus Conísq; rectis, scalenis, luxatis, &c. dicta sunt; eadem ferè Pyramidoidibus & Conoidibus accommodanda sunt.

Ego verò hanc Conoidis, (adeóq; & Pyramidoidis) Parabolici formationem potius adhibeo, quàm quæ a veteribus aliísq; adhiberi solita est, (nempe, circumductâ Semi-parabolâ rectâ, manente Axe;) quoniam ea formatio non omnibus Conoidibus (sed solummodo rectis) nec Pyramidoidibus omnino convenit. Atq; hoc eâdem ratione facio, qua Apollonius Euclidéam Coni formationem, (circumducto nempe Triangulo rectangulo, manente laterum circa angulum rectum alterutro,) in aliam commutavit (circumductâ nempe per circuli peripheriam lineâ rectâ, manente ipsius uno aliquo puncto extra circuli planum existente:) quia scilicet Euclidéa ista solis Conis rectis conveniebat, hæc autem quibusvis sive rectis sive scalenis. Non igitur mirari debet quispiam, si prout ille Euclidéam Coni, sic ego Archimedéam Conoideos, formationem specialem, in aliam magis universalem, commutavero: quæ etiam & Pyramidoidibus aliis (de quibus nulla hactenus, quantum scio, consideratio habita fuit) pariter conveniat.

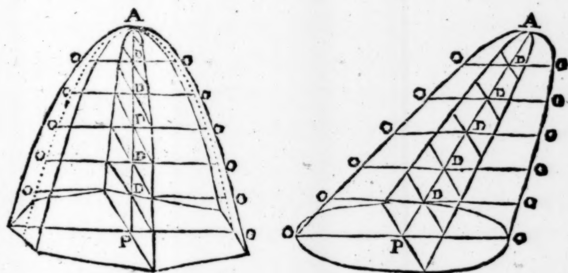
Quæ autem, de Conoidibus & Pyramidoidibus Parabolicis formandis, jam diximus; eadem de Ellipticis & Hyperbolicis deinceps intelligenda erunt.

PROP.

PROP. X.

De Conoideos & Pyramidoideos Parabolici sectione.

SI Pyramidoides (vel Conoides) Parabolicum plano per axem secetur; cum manifestum sit ipsius infinita plana similia similiter secari, & quidem per centra; erunt ea similiter bisecta; atque communes eorum cum plano secante sectiones erunt propterea in figurarum suarum, (quæ quidem Arithmetice proportionales sunt) adeoq; & distantiarum a



vertice, subduplicata ratione, &, propterea, ut ordinatim-applicatæ in Parabolâ. *Communis igitur sectio (Pyramidoidis Parabolici, planique per axem secantis,) est Parabola.*

De aliis verò Conoideos Parabolici sectionibus (non per axem) non libet hic speciatim differere: *Sunt autem illæ omnes* (vel circuli, vel) *Ellipses.*

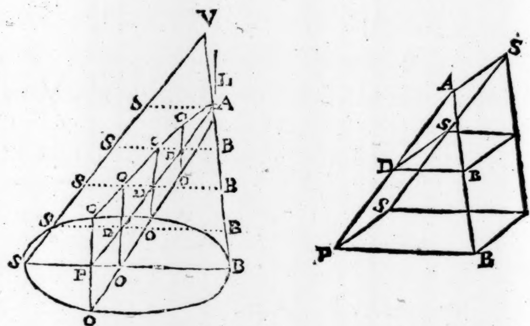
Nota tamen, ut ejusdem Parabolæ infinitæ sunt Diametri, (ut suo loco dicetur;) ita & *Conoideos Parabolici infinitos esse* (sive *Diametros* dicas, sive) *Axes; qui quidem omnes* (ut Parabolarum Diametri) *sunt invicem paralleli: Qui omnes sua plana habent Ordinatim-applicata.*

Verùm hæc monuiſſe ſufficiat, cùm non ſit hujus loci ea fuſius proſequi.

PROP. XI.

De Cuneo Parabolico.

SEd & libet hoc ſubjungere de Pyramidoide Parabolico. Quoniam (in Cono) Rectangula B D S æqualia ſunt Quadratis D O; ſi omnes rectæ B D ducantur in omnes D S, (hoc eſt, ſi ſuper Triangulo A P B, erigatur Priſma cujus altitudo ſit



A S, vel D S,) fient infinita Parallelogramma B D S æqualia totidem Quadratis D O: Hoc eſt, Pyramidoides Parabolicum (cujus baſis ſit Quadratum P O) æquatur Cuneo ſeu Priſmati A P B S, (quem *Cuneum Parabolicum* libet appellare.) Omnia enim B D S rectangula in Cuneo (ipſi B P S parallela) ſunt ipſa rectangula B D S in Cono deſignata. Ideóq; & totum toti æquatur, & quidem ſegmenta illius analogis ſegmentis hujus.

Intelligendum

Intelligendum autem eſt, Altitudinem Cunei (perpendiculari ab acie A S ad oppoſitam baſin B P S demiſſa æſtimandam) eandem eſſe debere atq; Altitudinem Conoideos.

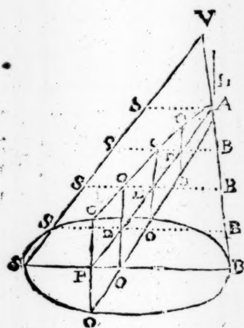
PROP. XII.

De Parabolæ Latere-*Recto*.

MAnifeſtum eſt, (per ea quæ dicta ſunt,) datis rectis D B, DS, hoc eſt, DB, A S; dari etiam D O (ordinatim-applicatam ad diametri punctum D) ut quæ eſt inter illas media proportionalis : At non contra; Nam & manifeſtum eſt, menſuras illas prorſus extraneas eſſe (extra Parabolæ planum conſtitutas) & omnino accidentarias, (non minùs quàm, in Multiplicatione, numeri Factores ad numerum Factum, qui ab aliis etiam Factoribus, infinitis modis variatis, produci poſſit:) Poſſunt enim binæ rectæ D B, DS, infinitis modis variari, iiſdem interim manentibus tam Diametro Parabolæ quàm ad illam ordinatim-applicatis; (ſi nempe quâ ratione augetur vel diminuitur P S vel A S, latus Parallelogrammi A P S, eâdem è contra minuatur vel augeatur P B latus trianguli A P B.) Quod quidem eouſq; verum eſt, ut quælibet parabola cuilibet Cono accommodari poſſit : (quod mox, ex abundanti, demonſtrabimus.)

Ne igitur nulla ſit determinata menſura, lineis ad ipſam Parabolam peculiariter pertinentibus exprimenda, quâ ordinatim applicatarum magnitudo explicetur : Loco rectarum D B, D S, hoc eſt D B, A S, (quarum hæc invariata manet, illa perpetuò variatur, prout propiùs aut remotiùs abeſt a Parabolæ vertice) duas alias jam olim ſubſtituerunt Coni-ſectionum contemplatores; Quarum altera eſt *Diameter*

intercepta, A D, quæ intra Parabolam reperitur, estq; semper rectæ D B (cujus vices supplet) proportionalis, (utraq; nempe eâdem ratione simul & crescunt & decrescunt pro vario situ *puncti-applicationis* D.) Reliqua verò, quod *Latus rectum* vocatur, (vel recta diameter, vel recta juxta quam possunt ordinatim-applicatæ, vel etiam, apud Midorgium, Parameter,) non uspiam vel in Coni-sectione, vel in ipso Cono, realiter exsistit; sed solâ imaginatione suppletur, ut vices subeat rectæ D S, vel A S: Ideoq; quantuplo major est vel minor A D quam D B, tantuplo è contra minus vel majus supponitur Latus rectum, (puta L A,) quam D S vel A S: Adeóq; tribus D B, D S, D A, vel D B, A S, D A, erit quarta reciprocè-proportionalis L A; ut æqualia sint rectangula D A × A L, ipsis D B × D S, vel D B × A S, hoc est, quadratis D O. Vel, (substitutis idoneis symbolis, puta b=D B, s=A S, d=A D, l=L A, & p=D O,) erit ubiq; Quadratum ordinatim-applicatæ in Parabolâ $p^2 = (bs =)\ dl$.



Estq; hoc quidem essentiale Parabolæ symptoma, unde reliqua omnia dependent, & calculo deduci possunt. Ut autem sectione Coni fiat, omnino accidentarium est. Ideóq;, genuino symptomate hic reperto, Conum dimittere licet; ideóq; ulteriorem in ipsius affectiones disquisitionem differemus donec ad absolutam Parabolæ tractationem (sine respectu ad Conum habito) perveniamus, (quam Prop. 21. & sequentibus aggrediemur:) Interim similia Ellipseos & Hyperbolæ genuina symptomata

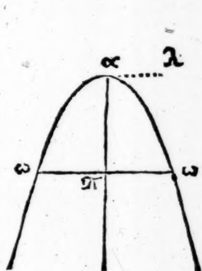
tomata inquiremus, ut omnium tandem absolutam naturam seorsim perpendamus.

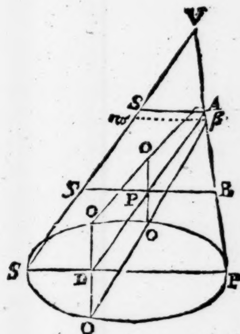
Monendum tamen est de Latere Recto; non idem Latus Rectum omnibus ejusdem Parabolæ Diametris convenire; (Quod etiam de Ellipseos & Hyperbolæ Latere Recto postea intelligendum erit:) Sed (ut habet quælibet Parabola infinitas Diametros, ut post dicetur, ita) quælibet Diameter suas habet ordinatim applicatas, suúmq; Latus Rectũ: Quæ quidem linea imaginaria, certæ tamen longitudinis, (quamvis vel ubivis aliàs scribi possit, vel etiam non scribi, sed solâ imaginatione suppleri) duci solet a Diametri Vertice ordinatim-applicatis parallela.

Quæ autem de Parabolæ Latere-recto dicta sunt, ea fere Lateribus rectis Ellipseos & Hyperbolæ deinceps accommodanda erunt.

Quod autem supra polliciti sumus, ex abundanti, demonstrare; nempe, *Quamlibet Parabolam cuilibet Cono aptari posse*; sic ostenditur

Sit proposita Parabola (cujuscunq; Coni) $\alpha\,\omega$, cujus axis $\alpha\,\pi$, ejusq puncto cuilibet π ordinatim-applicata $\pi\,\omega$. (Quòd autem quælibet Parabola Axem habeat, & quomodo in datâ Parabola reperiatur, post ostendetur; interim illud licebit, sine violata methodo, quasi concessum assumere, cùm tota hæc De-





monstratio sit ex abundanti:) Dico Parabolam illam cuilibet Cono, puta V B S, aptari posse.

Secetur enim per axem Conus propositus plano ad basin recto; sitq; Triangulum illa sectione factum V B D S. In hujus alterutro crure, puta V S, sumatur a vertice V ϖ æqualis ipsi α π diametro Parabolæ propositæ; & intelligatur recta duci ϖ β parallela basi B S. Tum rectis ϖβ, πω, quæratur tertia proportionalis, cui æqualis sumatur (in base Trianguli) recta S D; &, per punctum D, ducatur recta D A, lateri V S parallela, reliquoq; cruri V B occurrens in A. Dico rectam A D diametrum esse Parabolæ in Cono cui Parabola proposita congruet, quod sic ostendo.

Super Triangulo VBDS, rectâq; in illo A D, (quæ est, ex constructione, cruri V S parallela,) ad angulos rectos erigatur Planum, DAO. Cùm autem tam planum sic erectum, quam Basis Coni BOSD (ex constructione,) sint triangulo VBS recta; erit eorum communis sectio DO, eidem Triangulo recta sive perpendicularis (per 19 e 11,) adeoq; tam rectæ A D quàm (diametro basis Coni) B S perpendicularis (per 3 d 11;) ideóq; (per 7 hujus) AO, sectio in superficie Coni Plano sic erecto facta, erit Parabola, ejusq; Axis A D.

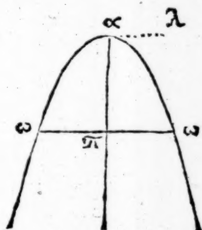
Tum in Axi A D sumatur recta A P, rectæ V ϖ, (hoc est απ,) æqualis: ductaq; SPB, rectæ SDB parallela; erit (propter similia triangula) PB æqualis rectæ ϖ β: sed & SP (propter parallelas) æqualis rectæ SD: Ideoq; ordinatim-applicata PO (media proportionalis inter S P, P B, hoc est, inter S D, ϖβ) æqualis est rectæ πω (quæ ipsis SD, ϖβ, media proportionalis est, ex constructione.)

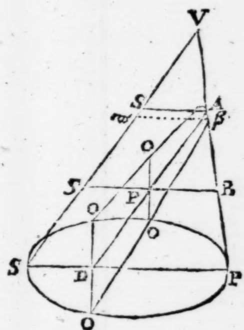
Cùm igitur tam AP, απ, quam PO, πω, sint æquales rectæ; atq; angulus comprehensus APO, angulo comprehenso απω, æqualis (quoniam uterq; rectus;) puncta α, π, ω, punctis A, P, O, applicata congruent; (rectæq; A P, P O, rectis α π, π ω,) Atq; idem eodem modo probari potest de reliquis punctis. Tota igitur α ω toti parabolæ A O congruit. Quod fieri posse probandum erat. Adeoq; Datam Parabolam dato Cono aptavimus: quod erat faciendum.

Idem Analytice sic poterit investigari. Propositum sit datam Parabolam αω (cujus Axis α π, ordinatim-applicata πω,) dato Cono VBOS adaptare. Et supponamus præstitum esse quod imperatur, sitq; ea parabola Cono aptata A O, cujus Axis AP=απ, eiq; ordinatim-applicata PO=πω. Adeóq; recta PO

Perpendicularis

perpendicularis tam rectæ BPS basi Trianguli-per-Axem, aut ei parallelæ, (propter Coni-sectionem,) quàm rectæ A P (propter Axem;) ideóq; recta P O plano APB (quod trianguli planum est) recta, (per 4 e 11.) & propterea tam planum circuli BOP, quam Parabolæ AOP, (quorum communis sectio est P O) eidem Trianguli plano rectum erit, (per 18 e 11.) Atq, hinc quidem constat, Triangulum-per-axem-Coni in quo quærendus est Axis Parabolæ, illud esse, quod Coni basi





rectum est; Atq; insuper, Planum-secans quod Parabolam efficit (adeoq; & Parabolæ planum) isti Triangulo rectum fore. Quæ est prima pars inquisitionis.

Deinde (reperto jam quodnam sit Triangulum per Axem Coni in quo quærendus est Axis quæsitæ Parabolæ; & quam inclinationem habiturum est planum secans ad illud Triangulum: ut situs Axis Parabolæ in illo Triangulo reperiatur, sic progrediendum;) supposito, ut priùs, rem factam esse quæ imperatur; & Parabolæ Axem A P in Triangulo-per-Axem VBS jacere: Erit A P (propter parabolam) alterutri Crurum, puta V S, parallela. Ideoq; (si per puncta A, P, duci intelligantur in triangulo per Axem rectæ A S, BPS, basi parallelæ) proportionales erunt (propter similia triangula), VB.BS : : VA. $AS = PS = \frac{BS \times VA}{VB}$. Item VS.SB : : A P. $PB = \frac{BS \times AP}{VS}$. Item (propter Coni-sectionem) S P. P O. P B $\div$, hoc est

BS

$\frac{BS \times VA}{VB}$. PO. $\frac{BS \times AP}{VS}$ ∺ continuè proportionales. Ergo POq= $\frac{VA \times AP}{VB \times VS} \times BSq$. hoc est, $\pi\omega q = \frac{BSq}{VB \times VS} \times VA \times \alpha\pi$. & $\frac{VB \times VS \times \pi\omega q}{BSq \times \alpha\pi}$ =VA. Ideoq; proportionales BSq VB×VS : : $\frac{\pi\omega q}{\alpha\pi}$. VA. Habetur ergo recta VA, adeoq; Parabolæ vertex A, in crure VB, unde ducta AP cruri VS parallela, est diameter Parabolæ quæsitæ.

Hoc est. *Si Conus Propositus secetur plano per Axem, quod Basi Coni rectum sit, triangulum faciente VBS: & fiat, ut BSq quadratum basis trianguli, ad VB×VS rectangulum sub cruribus: sic* $\frac{\pi\omega q}{\pi\alpha}$ (quadratum ordinatim-applicatæ in Parabolâ propositâ, per Axem divisum, hoc est) *Latus rectum Parabolæ propositæ Axi convenientis; ad VA distantiam verticis Parabolæ a vertice Trianguli, in utrovis ipsius crure mensurandam; Et deniq; a vertice A recta ducatur AP opposito cruri parallela; eiq; Planum erigatur plano trianguli VBS rectum: Planum hoc in superficie Coni faciet Parabolam, cui Parabola Proposita congruet.*

Demonstratio, per repetita Analyseos vestigia facilè instituetur.

Pari fere methodo demonstrari poterit, *Datam Ellipsin vel Hyperbolam* (de quibus postea dicendum erit) *non quidem Cono cuilibet, sed saltem Conis quotlibet specie differentibus, aptari posse.* Cujus Propositionis & Demonstrationem & Determinationem lubens prætereo, partim ne tædio sim, nec velim tyronibus ingenium suum exercendi causam præripere, partim etiam quoniam illud instituto nostro non est necessarium.

PROP. XIII.

De Ellipsi, sectione Coni factâ.

IN elipsi, Quadrata ordinatim-applicatarum æqualia sunt differentiis binorum rectangulorum; quorum quidem illa (majora) sunt interceptis

Diametris

Diametris proportionalia; hæc vero (minora) in earundem ratione duplicata.

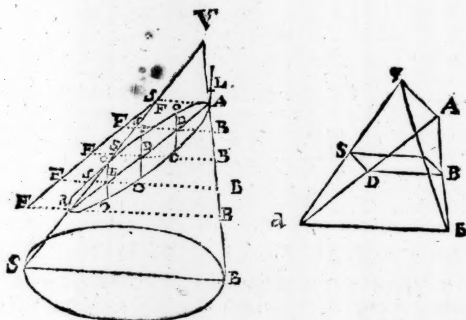
Sunt enim Quadrata DO æqualia Rectangulis BD×DS, (per prop. 7.) Ducta vero recta SFF, ipsi AE parallela, & continuatis rectis BDS ad F; erunt ubiq; rectæ DS = DF − FS. Et Rectangula BD×DS = BD×DF − BD×FS. Sunt autem (propter æquales rectas DF) Rectangula BD×DF, rectis BD proportionalia, ideóq; & rectis DA diametris interceptis (propter similia triangula ADB.) Rectangula verò BD×FS (quoniam tam BD quàm FS rectæ sunt rectis DA proportionales) sunt in duplicatâ ratione diametrorum interceptarum DA. Cum igitur sit ubiq; DOq = (BD×DS =) BD×DF − BD×FS; constat propositum.

PROP. XIV.

De Elliptico Pyramidoide, & Conoide, (sive Sphæroide) & Cuneo.

SI (ut Prop. 5, 6. formavimus Pyramidem vel Conum, & Prop. 9. Pyramidoides Parabolicum,) ex omnibus quadratis DO ordinatim-aplicatarum in ellipsi, formetur *Pyramidoides ellipticum* bicuspe (hoc est, Pyramidoides geminum super communi base,

vertices habens oppositos,) æquabitur illud cuneo cuidam bicuneato (nempe binas oppositas acies habenti, sed situ subcontrario & quasi decussato) hoc est, corpori solido super basi triangulari aBA erecto, altitudinem



habenti super puncto A æqualem rectæ AS, sed æquabiliter decrescentem donec super recta aB tandem evanescat & nulla sit. Et quidem segmenta illius, Analogis segmentis hujus. Adeoq; & notæ mensuræ.

Manifestum enim est, quod, si Cuneus ille bicuneatus (quem *Cuneum Ellipticum* libet appellare) plano ad planum trianguli aBA recto (sicut & AS supponitur ad idem planum recta esse seu perpendicularis) ubivis secetur secundum rectam DB quæ sit aB rectæ parallela, sectio illa præstabit rectangulum BDS, cujus duo latera erunt rectæ aB parallela, reliquaq; duo rectæ AS, totumq; rectangulum BDS in Cuneo, Analogo rectangulo BDS in Cono designato, æquale erit: Adeoq; rectangula omnia BDS in cuneo, æqualia erunt rectangulis omnibus BDS in Cono designatis, hoc est, omnibus quadratis DO; hoc est, totus Cuneus toti *Pyramidoidi* bicuspidi æqualis erit, & quidem segmenta hujus analogis segmentis illius. Quod erat ostendendum. Ita tamen ut eadem retineatur altitudo Pyramidoidis

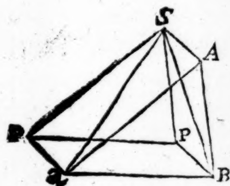
doidis, & Cunei, ut quadrata unius & Rectangula alterius æquè crassa intelligantur.

Cuneus autem ille bicuneatus, (quem Ellipticum diximus) est Pyramis super basi aBA, altitudinem habens AS, adeóq; notæ mensuræ.

Quod autem de Pyramidoide Elliptico ex omnibus Quadratis DO, dictum est; perinde valeret, si pro quadratis DO, substituerentur quadrata OO (ordinatim inscriptarum;) nisi quod Pyramidoides hoc esset illius quadruplum.

Cognitá verò mensurâ Pyramidoidis Elliptici super basi quadrata, adeóq; & ratione quam habet ad Parallelepipedum super eadem basi æquè-altum: cognoscetur etiam ratio Conoideos Elliptici (vel, ut dici solet, Sphæroideos) ad Cylindrum super eadem basi æquè-altum; vel etiam Pyramidoideos super quacunq; basi plana (puta triangulari, quinquangulari, &c. vel etiam curvilinea, aut mista,) ad Prisma super eadem basi æque-altum: (si nempe pro omnibus quadratis substituantur totidem circuli, triangula, aliæve similes figuræ.) Per *Basin* autem hic intelligo medium illud planum quod duobus illis sive Pyramidoidibus sive Conoidibus est basis communis.

Est autem *Ellipticus* ille (quem dicimus) cuneus, cunei Parabolici segmentum. Si enim cuneus Parabolicus AP, secetur Plano aSB; erit aSBA cuneus Ellipticus sive Pyramis super triangulari basi aBA; reliquum verò segmentum aBSPP est Pyramis super basi quadrilatera aBPP; utriusq; verò pyramidis cuspis communis S. Si igitur ex Prismate (cuneo nempe Parabolico) AP, auferatur Pyramis aBSPP, restabit Cuneus Ellipticus (vel Pyramis) aSBA; cui æquale est Pyramidoides Ellipticum.



Sed & idem immediate colligi potest ex propositionis præcedentis calculo. Cùm enim omnia rectangula BD×DS, hoc est, omnia quadrata DO, æquantur omnibus rectangulis BD×DF, demptis omnibus BD×FS, patet propositum. Omnia enim rectangula BD×DF constituunt cuneum Parabolicum, (per

prop. 11.) Omnia vero BD×FS, Pyramidem; (per prop. 6.) Eorum igitur differentia æquatur vel Cuneo Elliptico, vel etiam Elliptico Pyramidoidi.

PROP. XV.

De Conoideos & Pyramidoideos Elliptici Sectione.

SI Pyramidoides vel Conoides Ellipticum plano per Axem (vel, si mavis, Diametrum) secetur; sectio erit (vel circulus, vel saltem) Ellipsis.

Probatio ejusmodi instituenda est, qualis prop. 6, & 10. ubi Sectio Pyramidis per axem ostenditur esse Triangulum; & Pyramidoidis Parabolici, Parabolam,

Alias vero sectiones non per Axem, non libet hic speciatim attingere. Moneo tamen *Conoideos Elliptici* (hoc est, Sphæroideos) *Axes* (nisi Diametros malis appellare) *infinitos esse in communi centro* (ut Ellipsium Diametri) *coeuntes*; *qui omnes sua plana habent ordinatim-applicata.* Nota etiam *Conoideos Elliptici* (vel Sphæroideos) *Sectiones omnes plano factas* (sive per axem, adeóq; & centrum, transeunte, sive non,) *esse* (vel circulos, vel saltem) *Ellipses.*

His autem diutius insistere non est hujus loci. Sufficit monuisse.

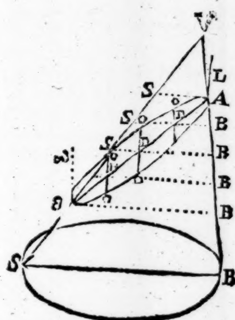
PROP. XVI.

De Ellipsis Latere-Recto.

CUM manifestum sit ex dictis, Quadrata DO, (Rectangulis BD×DS æqualia,) ex cognitis rectis BD, DS, cognosci posse; non autem, e contra, ex cognitis DO, cognosci rectas BD, DS; (possunt enim rectangula BD×DS infinitis modis variari, dummodo eadē maneat ordinatim-applicatarum quantitas, adeoq; eadem Ellipsis in conis dissimillimis reperi-

ri:

ri: ut patere poterit ex eis quæ ſupra de parabola dicta ſunt ad Prop. 12.) Placuit igitur Conicorum ſcriptori-



bus (ut in Parabola, ſic) in Ellipſi aliis menſuris ordinatim-applicatarum quantitatem determinare, quæ eandem Ellipſin ubiq; comitentur.

Nempe pro ſingulis rectis BD, ſubſtituunt ſingulas AD, diametros interceptas; quę quidem illis ſunt proportionales.

Pro recta vero AS, ſubſtituunt aliam, puta LA, imaginariam, (quod *Latus Rectum* appellant) quę tribus AS, BD, DA, ſit quarta reciproce proportionalis; ut ſit ubique $BD \times AS = DA \times LA$. Adeóq; Latus-rectū $LA = \frac{DB}{DA} \times AS$, & $AS = \frac{DA}{DB} \times LA$.

Tum (continuata Diametro AD donec oppoſito Trianguli-per-axem cruri occurrat in a, ut habeatur Diameter-tranſverſa Aa;) erit (propter ſimilia triangula) $Aa . AS :: Da . DS = \frac{Da}{Aa} \times AS$. Ideoque $BD \times DS$ $(= DOq) = \frac{Da}{Aa} \times AS \times BD = \frac{Da}{Aa} \times LA \times DA$. (quia nempe $BD \times AS = DA \times LA$, ut dictum eſt.)

Hoc est (substitutis idoneis symbolis, nempe $t=$ Aa, $d=$DA, $t-d=$Da, $l=$LA, & $e=$DO) Quadratum ordinatim-applicatæ in Ellipsi $e^2 = \frac{t-d}{t} ld = \frac{td-d^2}{t} l = dl - \frac{d}{t} dl = ld - \frac{l}{t} d^2$. (omnes enim hæ notationes tantundem valent.) Et quidem (repetita figura prop. 13.) tam separatim $ld=$FD×BD, & $\frac{l}{t} d^2 =$ F S × D B, quā conjunctim $-ld \frac{l}{t} d^2 =$FD×DB− FS × DB = SD × DB=DOq.

Demonstratione non opus est aliâ quam quæ propositionis curriculo passim interseritur.

Estq; hoc quidem essentiale Ellipseos Symptoma; unde reliqua dependent & calculo deduci possunt. Ut jam non opus sit reliquarum affectionum in ipso Cono investigatio; sed melius & clarius deinceps in absolutâ Ellipsis consideratione (sine ullo ad Conum respectu habito) instituetur: quam prop. 26. aggrediemur.

PROP. XVII.

De Hyperbola, Sectione Coni facta.

IN Hyperbola; Quadrata Ordinatim-applicatarum, æqualia sunt aggregatis binorum rectangulorum; quorum quidem altera sunt interceptis Diametris proportionalia, altera vero in earundem ratione duplicatâ.

Sunt enim Quadrata DO, æqualia Rectangulis BD×DS (per Prop. 7.) Ducta vero recta SFF ipsi AH parallela, (quæ Trapezium SSHA in Parallelogrammum SFHA & Triangulum SFS, dirimat) erunt ubiq; rectæ DS=DF+FS, & Rectangula BD×DS= BD × DF+BD × FS. Sunt autem (propter æquales DF) Rectangula BD×DF, rectis BD proportionalia, ideoq; & rectis DA Diametris-intercep-

tis

tis. Rectangula vero $BD \times FS$ (quoniam tam BD quàm FS rectæ ſunt rectis DA proportionales) in duplicata ratione

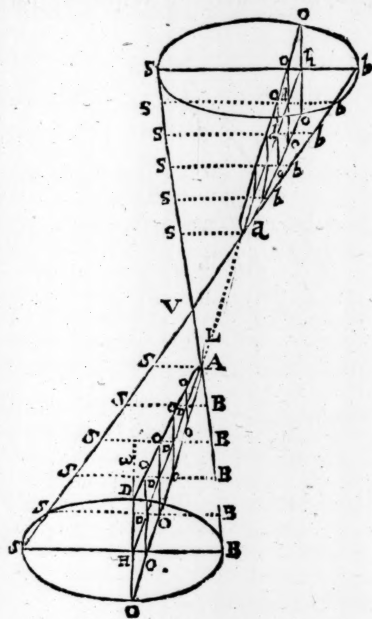
rectarum DA diametrorum interceptarum. Cùm igitur ſit ubiq; $DOq = (BD \times DS =)\ BD \times DF + BD \times FS$; conſtat propoſitum.

PROP. XVIII.

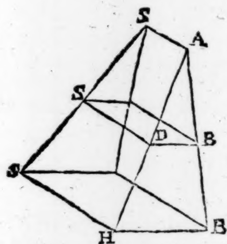
De Hyperbolico Pyramidoide, Conoide, & Cuneo.

SI (ut Prop. 9. & 14. formavimus Pyramidoides Parabolicum & Ellipticum) ex omnibus Quadratis DO ordinatim-applicatarum in Hyperbola, formetur *Pyramidoides Hyperbolicum*; æquabitur illud Cuneo cuidam, quem *Cuneum Hyperbolicum* libet appellare; nempe ſolido ſuper baſi triangulari AHB erecto, altitudinem habenti ſuper puncto A æqualem rectæ AS, ſed continue creſcentem æquabiliter donec ſuper rectâ HB æqualis evadat rectæ HS. Et quidem ſegmenta illius Pyramidoidis, ſegmentis

mentis cujus Cunei analogis erunt aequalia Adeoq; tam Pyramidoides totũ quam illius segmenta notae erunt mẽsurae.



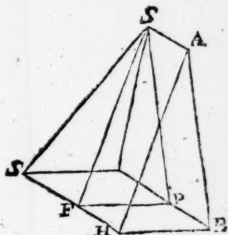
· Si enim Cuneus ille Hyperbolicus plano ubivis secetur, quod plano Trianguli AHB rectum sit, (sicut & AS supponitur eidem triangulo rectam esse,) & plano HBS parallelum: Rectangula singula hujusmodi sectione facta, puta BDS, aequalia erunt singulis BDS in cono designatis, hoc est, singulis quadratis DO: adeóq; aggregatum eorum aggregato horum; hoc est, totum Pyramidoides toti Cuneo; atq; (eâdem ratione) segmenta illius analogis segmentis hujus. Modo interim curetur ut eadem retineatur Pyramidoidis & Cunei Altitudo; ut Quadrata unius & Rectangula



la

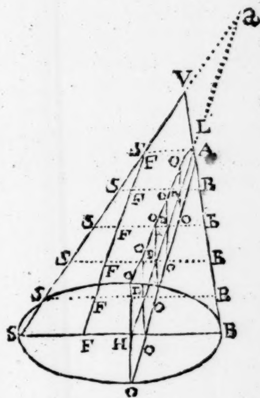
la alterius æqualem supponantur crassitiem habere.

Cuneus autem ille Hyperbolicus, est frustum Prismatis (plano abscissum) super basi AHB erecti; altitudinem habens super puncto A æqualem rectæ A S, super punctis autem H, B, æqualem rectæ H S. Adeóq; notæ mensuræ.



Est autem hic Cuneus, Aggregatum Cunei Parabolici HBASPF, & Pyramidis SPFS. quod patebit si secari intelligatur plano SFP parallelo triangulo AHB.

Quod ipsum etiam concludi potest ex calculo. Cum enim singula quadrata DO, vel rectangula BDS in Cono, æquentur singulis aggregatis BD×DF+BD×FS; manifestum est omnia BD×DF (per Prop. 11.) æquari Cuneo Parabolico, atq; omnia BD×FS (per Prop. 6.) Pyramidi.



Cuneus autem ille, sive consideretur ut frustum Prismatis, sive ut aggregatum Pyramidis & Prismatis (Cuneive Parabolici,) erit notæ mensuræ; Adeóq; & Pyramidoides Hyperbolicum (huic æquale) erit notæ mensuræ.

Quod autem de Pyramidoide ex quadratis DO dictum est, pariter etiam conveniret Pyramidoidi ex quadratis OO (ordinatim-inscriptarum) nisi quod hoc esset illius quadruplum.

Item (quoniam similes figuræ planæ sunt ad invicem sicut homologorum laterum, vel etiam rectarum quarumlibet similiter inscriptarum, quadrata;) Cùm cognoscatur mensura Pyramidoidis Hyperbolici super basi quadratá, adeóq; & ratio ipsius ad Parallepipedum super eádem vel æquali basi æquè al-

tum; cognoscetur etiam ratio cujuslibet alius Pyramidoideos vel Conoideos Hyperbolici super quacunq; basi plana ad Prisma vel Cylindrum super eâdem vel æquali basi æquè-altum. Si nempe pro singulis quadratis substituantur vel Circuli vel Triangula, vel quævis aliæ figuræ planæ similes.

PROP. XIX.

De Conoideos & Pyramidoideos Hyperbolici Sectione.

SI Pyramidoides vel Conoides Hyperbolicum plano per Axem (vel, si mavis, Diametrum) secetur; Sectio erit Hyperbola.

Probatur eodem argumento quo usi sumus de Pyramide & Cono prop 6. atq; de Pyramidoidibus & Conoidibus Parabolico & Elliptico, prop. 10 & 15.

Habet autem Conoides Hyperbolicum Axes (nisi Diametros malis appellare) *infinitos, communi centro* (sed extra Conoides) *coeuntes; Qui & sua habent plana ordinatim applicata.*

Si vero secetur Conoides Hyperbolicum plano per Axem (vel Diametrum potius) *non transeunte; potest eâ Sectio vel esse Hyperbola, vel Parabola, vel Ellipsis* (circulúsve.)

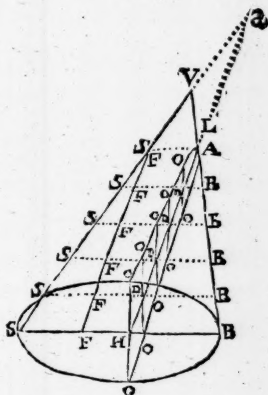
Et quidem de (Pyramidoidibus & præsertim) Conoidibus, Parabolicis Ellipticis & Hyperbolicis; eorúmq; Axibus sive Diametris, interceptis & transversis; Planisq; ordinatim applicatis, secantibus, & tangentibus; Centris, item & Lateribus-Rectis, aliisq; ejusmodi: facile esset novam quidem nec injucundam disquisitionem instituere; (ad quod etiam satis proclivis sum, cùm totam fere istius negotii difficultatem jam superaverim, nec quicquam ferè supersit aliud quàm ut quæ mente concepi verbis exprimam:) Verùm illud non est hujus loci; neq; jam licet nimium divagari. Et forsan alii cuidam non ingratum erit, ex eâ methodo quam nos in Coni-sectionum tractatione calcamus, ansam arripere tale quid in Conoidibus exercendi. Nobis interim & monuisse & innuisse hic loci sufficiat: aliud enim est quod præ manibus habemus.

PROP.

PROP. XX.

De Hyperbolæ Latere-Recto.

CUm ſit in Hyperbola, ut dictum eſt, DOq=BD ×DS; adeoq; quantitas ordinatim-applicatarum DO, ex cognitis rectis BD, DS, cognoſci poſſit; non contra: (cùm poſſint rectæ BD, DS, infinitis modis variari, pro conorum variorum diverſitate, aut etiam varia ad eundem conum applicatione, dum interim rectarum DO quantitas eadem maneat; ſicut de Parabolâ & Ellipſi ſupra dictum eſt prop. 12, & 16.) Commodum igitur viſum eſt Conicorum Scriptoribus, harum loco, alias menſuras ſubſtituere, quibus Ordinatim-applicatarum quantitatem exprimant, quæ eandem Hyperbolam ubique comitentur in quocunq; demum cono, aut quocunq; ad illum modo applicetur, aut etiam extra conum conſtituatur. (Quod & de Parabolâ & Ellipſi factum eſſe ſupra declaratum eſt.)



Nempe, pro ſingulis rectis BD, ſubſtituunt ſingulas AD diametros-interceptas, quæ quidem illis ſunt proportionales.

Pro rectâ verò AS, ſubſtituunt aliam, puta LA, imaginariam, (quod *Latus-rectum* appellant;) quæ tribus DB, AS, DA, ſit quarta reciprocè proportionalis; ut ſit ubiq; DB × AS=DA × AL; adeóq; Latus rectum

ctum LA $= \frac{DB}{DA} \times$ AS, & AS $= \frac{DA}{DB} \times$ LA.

Deniq; (producta prius diametro DA, extra Hyperbolam, donec Opposito vel Triangulo vel Cono occurrat in a, ut habeatur Diameter-transversa Aa,) erit (propter similia triangula) Aa. AS : : Da. DS $= \frac{Da}{Aa} \times$ AS; ideoq; BD $\times$ DS ($=$ DOq) $= \frac{Da}{Aa} \times$ AS $\times$ BD $= \frac{Da}{Aa} \times$ LA $\times$ DA, (quia nempe BD $\times$ AS $=$ DA $\times$ LA ut dictum est.)

Hoc est, (substitutis idoneis Symbolis, nempe $t =$ Aa, $d =$ DA, $t+d =$ Da, $l =$ LA, & $h =$ DO,) Quadratum ordinatim-applicatæ in Hyperbolâ $h^2 = \frac{t+d}{t} ld = \frac{td+d^2}{t} l = dl + \frac{d}{t} dl = ld + \frac{l}{t} d^2$ (omnes enim hæ notationes tantundem valent.) Et quidem tam separatim $ld =$ FD $\times$ DB, & $\frac{l}{t} d^2 =$ FS $\times$ DB, quam conjunctim $ld + \frac{l}{t} d^2 =$ FD $\times$ DB + FS $\times$ DB $=$ SD $\times$ DB $=$ DOq.

Estq; hoc quidem primarium atq; essentiale Hyperbolæ symptoma, unde reliqua dependent omnia & calculo comprobari possunt. Reliquas Hyperbolæ affectiones deinceps investigabimus, ubi absolutam ipsius tractationem (sine respectu habito ad Conum) instituemus.

Atq; hactenus quidem *Coni-sectiones* vulgo dictas, Parabolam, Ellipsin, atq; Hyperbolam, inspecto Cono consideravimus; ut quæ a Cono secto (quod & nomen innuit) originem traxisse reputantur. Adeóq; primaria illarum symptomata ab ipso deduxi; quod & de aliis illarum affectionibus fecisse (si id opus esset) non adeo esset difficile. Quoniam autem earum natura magis absoluta est, quam ut ad Conum solum pertinere videantur; priorem contemplationem eousq; prosecutus sum, ut & fontes aperirem unde Veteres doctrinam suam hausisse videntur, & quibus passibus ad abstrusas illas quas exhibent demonstrationes aut pervenerint aut saltem pervenisse potuerint; Et

essentialia illarum symptomata inde deducerem, ut tandem liceat illas etiam extra Conum suum intelligere, aut etiam (si libet) de Cono in Conum transferre; cum earum affectiones reliquæ ex jam traditis (etiam sine Coni auxilio) deduci possint, ut in sequentibus patebit. Non autem earum affectiones omnes ea methodo prosecutus sum; quoniam illarum traditio ex absoluta, quæ sequitur, tractatione (seposito Cono) & clarius & facilius peragi possit, nec opus sit rem eandem iteratò agere.



PARS





PARS SECUNDA.

C*UM tradita sint in praecedentibus* Parabolæ, Ellipsis, *atq;* Hyperbolæ, (*quas* Conisectiones *appellant*,) *essentialia symptomata, ab ipso secto Cono* (*unde Originem traxisse existimantur*) *desumpta; quæ ipsarum naturam absolutam ita interim exponunt, ut sive a Secto Cono, sive aliunde genesin sortiantur eadem natura absoluta eisdem characteribus designanda esset: Licebit in sequentibus illas* (*sive lineas sive figuras*) *secundum absolutam quam in se habent naturam contemplari, sine respectu ad genesin habito, quæ vel a Sectione Coni, vel etiam aliunde contingere possit: Et quidem undecunq; contingat, absolutam earum contemplationem neutiquam conturbet.*

PROP. XXI.

De Parabola, absolutè considerata.

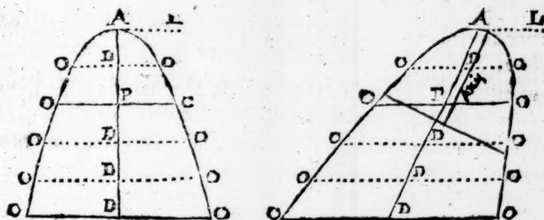
CUm sit in Parabola Quadratum Ordinatim-applicatæ cujuslibet ($p^2 = ld$) æquale rectangulo quod intercepta Diametro & Latere-recto comprehenditur, (ut, inspecto Cono supra deprehendimus, prop. 12.) Licebit jam Parabolam, eo charactere ornatam, suo Cono eximere, atq; absolutè quidem & Universaliter definire.

Prabolam igitur appello eam (sive lineam curvam in plano descriptam, sive figuram planam, ejusmodi curvâ terminatam, puta OAO) cujus ordinatim-applicatarum

plicatarum quadrata sunt interceptis-diametris proportionalia.

Rectam vero (imaginariam) quæ cum interceptis-diametris (tanquam communis altitudo) continebit rectangula (ipsis quidem diametris-interceptis proportionalia) Quadratis illis Ordinatim-applicatarum æqualia, appello *Latus-Rectum*; puta LA.

Ordinatim-applicatas verò appello, (DO, PO,) semisses parallelarum rectarum,(OO,OO,) Parabolâ utrinq; terminatarum (quas *Ordinatim-inscriptas*, vel *Ordinatim-subtensas* appello) una linea recta (puta ADP, quam appello *Diametrum*) bisectarum.



Punctum autem illud bisectionis, (D vel P,) *Punctum applicationis* appello; in quo quippe Diametro suæ applicatur ea quam Ordinatim-applicatam diximus.

Diametri vero segmentum, puncto-applicationis & curva Parabolica comprehensum, (AD, AP,) *Diametrum-Interceptam* appello.

Punctumq; Diametri in curva illa existens (puta A) appello *Verticem*, (tam Diametri, quàm ipsius Parabolæ, secundum illam Diametrum consideratæ.)

Ordinatim-positas appello non modo eas, quas supra *Ordinatim-inscriptas*, atq; *Ordinatim-applicatas* dixi, (quæ vel utrinq; vel ab altera saltem parte Parabola

rabola terminantur,) ſed alias quaſvis ipſis parallelas (quantævis longitudinis) Diametro ſimiliter appoſitas, & propterea eoſdem cum diametro angulos facientes.

Atq; hinc quidem, ſi fuiſſet res integra, neq; Conicæ Sectiones, ut vocantur, Originem a Cono traxiſſe vulgo reputarentur, (quare & mihi neceſſe erat eas, ſecundum illam etiam hypotheſin exponere, ne videar novas quaſdam figuras comminiſci, potius quam ab aliis receptas explicare:) licuiſſet totius hujuſce tractationis initium poſuiſſe, omiſſis eis omnibus quæ ſuperius in parte prima exhibuimus; aut ea ſaltem (ſi libuiſſet adjungere) hinc quaſi a vero fonte demonſtraſſe. (Adeoq; novas terminorum aliquot definitiones neceſſe eſt & hîc & deinceps aliquoties adjungere, omiſſa Coni mentione, ne opus ſit ad præcedentia recurrere, aut Coni auxilium in definitionibus poſtulare.)

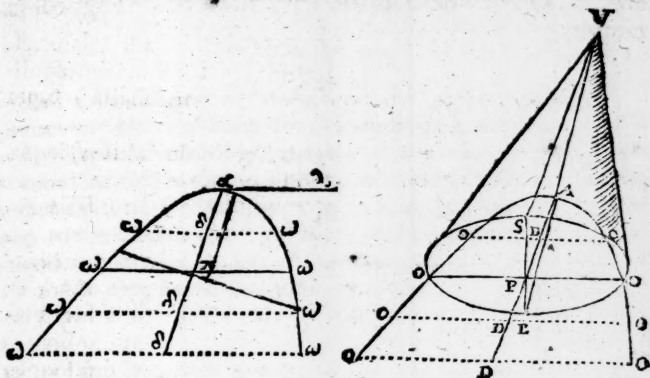
Non enim eſt *Parabolæ* magis eſſentiale, ut fiat *Sectione Coni Plano lateri parallelo*; quam *Circulo*, ut fiat *Sectione Coni plano baſi parallelo*; aut *Triangulo*, ut fiat *Sectione Coni per Verticem*. Neq; illud volunt alii: Quamvis enim Parabolam (quod & de aliis Coni-Sectionibus ſimiliter intelligendum eſt) ſecto Cono generari definiant; non tamen ſolas illas, quæ ſectione Coni fiunt, pro Parabolis habent, (nam & alios agnoſcunt Parabolam in plano deſcribendi modos;) ſed tales eſſe volunt (ſive figuras ſive lineas curvas) quales ejuſmodi ſectione Coni fieri poſſunt.

Parabolam autem a *nobis definitam eandem eſſe cum Parabola Apollonii*, & aliorum; talem nempe, qualis ſectione Coni effici poſſit: Sic demonſtro.

Eſto Parabola quælibet a nobis definita $\omega\alpha\omega$, (cujuſq; Ordinatim-applicata quælibet $\pi\omega$, cum diametro $\alpha\pi$ angulum $\alpha\pi\omega$ quemcunq; faciens; ſitq; $\alpha\lambda$ latus rectum.) Dico hanc Parabolam talem eſſe qualis ſectione Coni effici poſſet.

Fiant enim rectæ $AP = PB = \alpha\pi$; ſitq; angulus APB rectus & (continuata BP) fiat $PS = \alpha\lambda$; & jungatur recta BA, quæ (continuata) concurrat cum rectâ SV (ipſi PA parallela) in V, ut compleatur triangulum VBS; ſuper quod erigatur circulus

culus diametrum habens BS, qui cùm triangulo VBS angulum inclinationis faciat æqualem angulo $\alpha\pi\omega$; eiq; paralleli



circuli alii infiniti supponantur, (diametros habentes in triangulo VBS ipsi BS parallelas) qui conum VBOS compleant (per prop 5 ; per cujus axem incedit VBS Triangulum (quippe in quo reperiuntur omnium circulorum parallelorum diametri.) Tum erigatur planum APO triangulo VBS rectum, quod igitur secabit circulum SOB secundum rectam PO, quæ (propter angulum etiam APB rectum) perpendicularis erit rectæ BS, per 3 & 4 dd 11, (angulumq; APO constituet æqualem inclinationi planorum, per 6d11, adeóq; angulo $\alpha\pi\omega$,) Planum igitur APO, conisectionem efficit AO: cúmq; ipsius diameter AP parallela sit VS opposito cruri trianguli per axem; sectio illa erit parabola, qualem descripsimus prop. 7. (ut inde patet;) hoc est, qualem definit Apollonius prop. 11. lib. 1. Conicorum.

Sed & eidem congruit Parabola proposita, a nobis definita. Nam quadratum PO (=BP x PS) æquatur quadrato $\pi\omega$ (= $\pi\alpha \times \alpha\lambda$,) cùm sit (ex constructione) $\pi\alpha$=PB, & $\alpha\lambda$=PS: adeoq; & recta PO=$\pi\omega$. Sed & (ex constructione) AP=$\alpha\pi$, & angulus APO=$o\pi\omega$, (ut ostensum est:) congruunt ergo rectæ AP, PO, rectis $\alpha\pi$, $\pi\omega$, (& angulus comprehensus angulo comprehenso:)

henso:) Atq; eâdem ratione reliquæ ordinatim-applicatæ DO reliquis δω congruunt, adeóq; & Parabola Parabolæ congruit. Parabola igitur a nobis definita, Parabolæ sectione coni factæ congruit, adeóq; talis est qualis sectione coni effici posset. Quod erat primo demonstrandum.

Contrà verò, Parabolam sectione Coni factam talem esse qualem nos descripsimus (nempe quadrata ordinatim-applicatarum habere diametris interceptis proportionalia) supra demonstratum est prop. 8 & 12.

Eadem igitur est Parabola quæ ab Apollonio (aliísq;) & quæ a nobis definitur. Quod ostendisse par erat.

Sed & eâdem opera docuimus, *Conum construere, eiq; datam Parabolam ita aptare, ut data ipsius diameter fiat Diameter-ex-generatione.* Atq; etiam Theorematice verum esse, *Parabolæ diametrum quamlibet fieri posse (in aliquo saltem Cono) diametrum-ex-generatione; & quomodo illud fiat.* (quamvis & illud aliis mille modis fieri possit.)

An verò universaliter verum sit, *Datam Parabolam dato Cono ita aptari posse, ut data ipsius diameter fiat diameter-ex-generatione*, est alia disquisitio. Est autem & illud verum, modò datæ diametri ad suas ordinatim-applicatas obliquitas major non sit quam obliquitas Axis assignati Coni ad basin suam. Si secus autem; illud non fiet dummodo solum circulum pro Coni base agnoscimus. Si verò admittatur, ut non modo Circulus, sed & Ellipsis quælibet, pro base Coni reputetur; etiam universaliter illud verum erit, neq; determinatione indigebit Theorema. Hoc autem obiter tantum sine Demonstratione moneo; quoniam nec illud est hujus loci, nec mihi animus est ad singulas minutias descendere. Ad reliquas igitur Parabolæ affectiones calculo comprobandas festino.

PROP. XXII.

Corollaria.

P*Atet ex dictis*; Quod cum sit (ut ostensum est) $p^2 = ld$; erunt, in Parabolâ, Diameter-intercepta, Ordinatim-applicata, & Latus-Rectum, continuè proportionalia.

Adeoq;

Adeoq;, Datis eorum duobus quibusvis, etiam reliquum (magnitudine) datur. Nempe,

In Parabolâ {
Ordinatim-applicata, $p=\sqrt{ld}$.
ejusq; quadratum, $p^2=ld$.
Latus-Rectum, $l=\frac{p^2}{d}$.
Diameter-intercepta, $d=\frac{p^2}{l}$.

Patet etiam; Ordinatim-applicatas, prout longius a vertice applicantur, ita semper augeri, (cùm ipsarum quadrata sint interceptis diametris, hoc est, distantiis punctorum-applicationis a vertice, proportionalia.)

Et propterea, Parabolam ejusmodi curvam esse, quæ per se figuram non comprehendet; cum crura perpetuo magis divaricentur, nec sint unquam (extra punctum verticis) coitura.

PROP. XXIII.

De Rectâ Parabolam contingente.

SI, sumpto ubivis in Parabolæ diametro puncto P, cui ordinatim-applicetur Pα; diameter PA extra Parabolam continuetur ut fiat continuatio AF, ipsi AP diametro interceptæ æqualis; recta Fα ducta, Parabolam in puncto α continget. *Et contra*; Si Parabolam in α contingat recta αF, diametro productæ occurrens in F; erit AF (continuatio) ipsi AP (diametro-interceptæ) æqualis.

Nam sumpto, in eâdem diametro, puncto quovis D, cui ordinatim-applicetur DO, quæ ad rectam Fα pertingat in T; Dico punctum T vel idem esse cum puncto α, vel extra Parabolam cadere; hoc est, rectam DT vel æqualem esse rectæ DO (si nempe puncta D, P, coincidant,) vel (si alibi sumatur D) longiorem.

Esto enim (ob commodiorem calculum) P$\alpha = p$, PA$= d$ (ideoq; PF$= 2d$,) PD$= a$, (ideoq; DA$= d \pm a$, DF$= 2d \pm a$, variatis nempe signis +, —, prout supponitur punctum D infra vel supra punctum P assumi.)

Erit igitur (propter Parabolam) PA.DA : : Pαq.DOq. hoc est, $d.d \pm a : : p^2. \frac{d \pm a}{d} p^2 =$ DOq.

Et (propter similia triangula) PF.DF : : Pα. DT. hoc est, $2d, 2d \pm a : : p. \frac{2d \pm a}{2d} p =$ DT. hujusq; quadratum $\frac{4d^2 \pm 4da + a^2}{4d^2} p^2 =$ DTq.

Est igitur differentia quadratorum DTq — DOq $= \frac{d \pm a}{d} p^2 - \frac{4d^2 \pm 4da + a^2}{4d^2} p^2 = \frac{a^2}{4d^2} p^2$. Quæ quidem vel aliqua est, si puncta P, D, distent, (sitq; propterea a quantitas realis;) vel omnino nulla, si coincidant puncta P, D; (evanescente quippe quantitate a, adeóq; & ipsius multiplicibus omnibus.) Hoc est, quadrata DTq, DOq, & propterea eorum latera DT, DO, vel æqualia sunt, si sumatur punctum D idem atq; P; vel illud majus est, si alibi sumatur D. Et propterea, cum rectæ αF (quantumvis utrinq; productæ) singula puncta ipso α excepto, sint extra parabolam; ea Parabolam in unico puncto α contingit. Quod erat Demonstrandum.

Estq; hæc nostra demonstratio multo expeditior, quam quæ ab Apollonio aliisq;, (adhibito Cono, variisq; lemmatis præmissis) adducuntur.

Si verò propositio hæc non fuisset antehac excogitata, sed à nobis jam quærenda: *Illud Analytice sic fieri possit.*

Supponamus rem quasi jam factam; contingentem αF, diametro productæ occurrere in F: & quærenda sit longitudo rectæ PF.

Retineatur eadem quæ prius figura; eademq; symbola, nisi

quod

quod pro PF (nondum cognita) substituatur f, adeoq; pro DF, $f \pm a$. Erunt igitur (ut prius) PA. DA :: Pαq. DOq $= \frac{d \pm a}{d} p^2$. Et PF. DF :: Pα. DT. (hoc est, $f . f \pm a :: p . \frac{f \pm a}{f} p =$ DT. Et $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f2} p^2 =$ DTq.

Est item (propter tangentem) DT $\geqq$ DO (hoc est, DT æqualis vel major quàm DO; illud quidem si D, P, coincidant; hoc, si secus) & DTq $\geqq$ DOq, hoc est $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f2} p^2 \geqq \frac{d \pm a}{d} p^2$; & (utrumq; multiplicando in $df2$ & dividendo per p^2) erit $df^2 \pm 2dfa + da^2 \geqq df^2 \pm f^2 a$: & (auferendo utrinq; $df2$, atq; dividendo per $\pm a$) $2df \pm da \geqq f^2$.

Deniq; ponendo D P idem punctum (ut evanescat quantitas a, adeoq; & da,) erit $2df = f^2$, hoc est $2d = f$. Quod est ipsum Theorema quod investigandum erat, quodq; modo demonstravimus.

Conversa propositionis propositæ; nempe *Parabolæ tangentem αF diametro PA productæ occursuram, & quidem ita ut abscindat rectam AF ipsi AP æqualem*; ex dictis satis patet, vel inde saltem facile deduci potest.

Atq; etiam; *Rectam AF Parabolam in unico puncto contingere.*

Item, *Ab eodem puncto F, atq; ad easdem partes, rectam aliam quæ Parabolam contingat duci non posse.*

Et, *Parabolam in eodem puncto α non nisi unicam rectam contingere posse.*

Adeoq; *In locum inter curvam αA rectamq; contingentem αF, aliam rectam lineam cadere non posse*: (Hoc est, prout ego alibi peculiari tractatu fusius demonstravi, *Angulum qui Contactus dicitur, esse angulum nullius magnitudinis, sive non-Angulum.*)

Verùm cum ea non difficulter calculo demonstrari possint (demonstrationibus præcedenti non absimilibus) ego, partim ut tyronibus quo se exerceant relinquam, partim ne aliis tædio sim, eis sigillatim demonstrandis supersedeo.

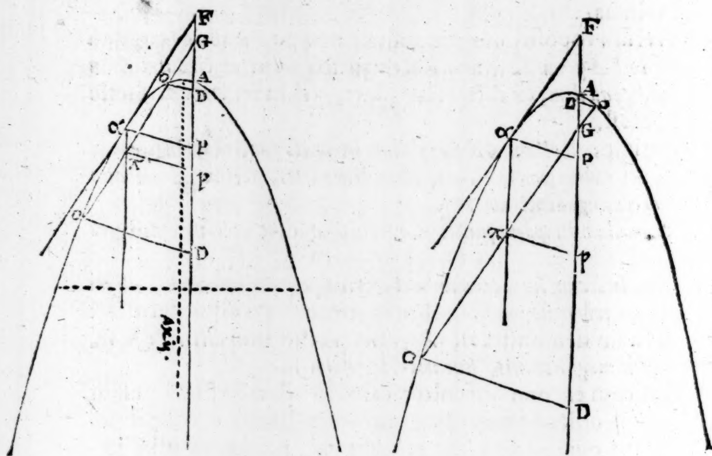
PROP. XXIV.

De Parabolæ Diametris.

SI a puncto quovis α in Parabolæ curvâ Aα, ducatur recta απ parallela diametro AP: Erit απ sic ducta ejusdem Parabolæ diameter; verticem habens α, & Ordinatim-applicatas πO rectæ αF (Parabolam in vertice α contingenti) parallelas.

Libet hanc *Propositionem primo Analyticè examinare*, deinde & Syntheticè demonstrare.

Supponamus igitur rem ita esse ut perhibetur: adeóq; inscriptam OO, rectæ αF parallelam, atq; in π bisectam sintq;



rectæ OD, OD, αP, diametro AP, ordinatim applicatæ, adeóq; invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur πp, quæ igitur (propter parallelas) bisecabit (ut rectam OO, sic) rectum DD. Deniq; recta OO (producta si opus) occurrat diametro AP

AP (saltem productæ) in G. (occursuram autem certum est, cum ipsi parallela αF eidem diametro occurrat, puta in F, per præcedentem.) Eruntq; (propter parallelas) $Pp = \alpha\varpi = FG$: & propterea $PF = pG$.

Tum substitutis (ob commodiorem calculum) idoneis symbolis, esto $P\alpha = p$. $PA = d$. (ideóq; per præced. $PF = pG = 2d$.) $Pp = \alpha\varpi = FG = g$. (ergo $pA = pP + PA = d + g$) $pD = q$. (ideoq; $DA = pA \pm pD = d + g \pm q$. & $DG = pG \mp pD = 2d \mp q$.)

Erit igitur (propter Parabolam) $PA . DA :: P\alpha q . DOq$. hoc est $d . d + g \pm q :: p^2 . \frac{d + g \pm q}{d} p^2 = DOq$.

Item (propter similia triangula) $PF . PA :: DG . DO$. hoc est $2d . p :: 2d \mp q . \frac{2d \mp q}{2d} p = DO$. Et (sumendo quadrata)

$$\frac{4d^2 \mp 4dq + q^2}{4d^2} p^2 = DOq = \frac{d + g \pm q}{d} p^2.$$

Ergo (utrinq; dividendo per p^2 & multiplicando per $4d^2$) $4d^2 \mp 4dq + q^2 = 4d^2 + 4dg \pm 4dq$. hoc est (sublatis utrinq; æqualibus) $q^2 = 4dg$. Adeoq; inventa est quantitas q, adeóq; & puncta D, D. quibus Ordinatim applicantur DO, DO. Vera igitur est propositio.

Illud Synthetice sic demonstrabimus, premendo Analyseos vestigia.

Diametro AP ducatur parallela $\alpha\pi$, per cujus punctum quodvis (intra parabolam) π, ducatur recta πG diametro occurrens in G, & parallela tangenti αF occurrenti diametro in F. Dico $\alpha\varpi$ ejusdem Parabolæ diametrum esse eiq; ordinatim poni πG.

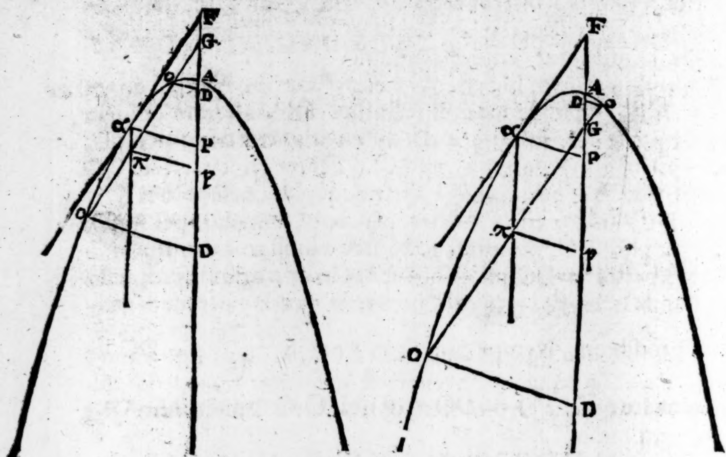
Diametro AP ordinatim applicetur αP, eiq; parallela ducatur ϖp diametro occurrens in p. Et sunto symbola $P\alpha = p$, $PA = d$. $FG = \alpha\pi = g$.

Tum sumantur in diametro utrinq; a puncto p, æquales rectæ $pD = (\sqrt{4dg} =) 2\sqrt{dg}$. (hoc est, duplum mediæ proportionalis inter AP, $\alpha\varpi$, rectas.) atq; punctis D, D, ordinatim ponantur DO, DO, rectæ πG occurrentes in O, O; quæ cum parallelæ sint rectæ ϖp, sicut recta DD (ex constructione) bi-

secatur

ſecatur in p, erit ideo & OO (propter parallelas) biſecta in ϖ.

Reſtat ut oſtendam rectam illam O O (biſectam in ϖ) Parabolæ inſcriptam eſſe, (ut $\alpha\pi$ recta biſecans ſit diameter,) hoc eſt, puncta O O eſſe in Parabolæ Curva. Quod ſic probatur.



Eſt $pA = PA + Pp = d + g$. $DA = pA \pm pD = d + g \pm 2\sqrt{dg}$. $pG = PF = 2d$. $DG = pG \mp pD = 2d \mp 2\sqrt{dg}$.

Tum (propter parabolam) ut PA, ad D A; ſic $P\alpha q$ quadratum ordinatim-applicatæ puncto P, ad quadratum ordinatim-applicatæ puncto D: hoc eſt $d . d + g \pm 2\sqrt{dg} :: p^2 . \frac{d + g \pm 2\sqrt{dg}}{d} p^2$. quod igitur eſt quadratum ordinatim-applicatæ puncto D.

Sed & tantundem eſt quadratum rectæ D O. Nam (propter ſimilia triangula) $PF . P\alpha :: DG . DO$ hoc eſt, $2d . p :: 2d \mp 2\sqrt{dg} . \frac{2d \mp 2\sqrt{dg}}{2d} p = DO$. Ejuſq; quadratũ $DOq = \frac{4d^2 + 4dg \mp 8d\sqrt{dg}}{4d^2} p^2 = \frac{d + g \pm 2\sqrt{dg}}{d} p^2$.

Eſt igitur quadratum rectæ DO æquale quadrato ordinatim applicatæ

applicatæ puncto D; adeoq; recta DO ipsi ordinatim-applicatæ æqualis. Sed & puncto D ordinatim-ponitur recta DO (ex constructione) ergo ordinatim-applicata est: punctaq; OO propterea sunt in ipsa Parabolæ curvâ, adeóq; OO recta Parabolæ inscripta. Sed & eam (atq; eâdem ratione ipsi parallelas inscriptas omnes) bisecat recta $\alpha\pi$. Est igitur (per def.) $\alpha\pi$ diameter, eiq; ordinatim-applicata πO, (ordinatim-inscriptæ semissis.) Quod erat demonstrandum.

Monendum autem hic est, quòd cum (tam in Analysi quam in Synthesi) dicimus duarum rectarum DG, alteram quidem æqualem esse pG $\sim$ pD, hoc est, differentiæ rectarum pG, pD, fieri quidem potest ut quandoq; pG (nempe quoties recta OO diametrum AP non transit) quandoq; pD (nempe ubi OO transit AP) major esse: Adeoq; pG $\sim$ pD, nunc per pG $-$ pD, nunc per pD $-$ pG, interpretandū erit. Verùm hæc calculum non omnino perturbat; quoniā ea quantitas in operationis progressu quadranda occurrit: quo casu, utrumvis contingat, eadem quadrata prodibunt. Nempe cum sit in Analysi $\frac{2d \mp q}{2d} p =$ DO, sive exponatur $\frac{2d \pm q}{2d} p =$ DO (ut ubi OO non transit AP,) sive $\frac{q \pm 2d}{2d} p =$ DO (ut ubi transit,) utrovis modo erit $\frac{4d^2 + q^2 \pm 4dq}{4d^2} p^2 =$ DOq. Et pariter contingit in Demonstratione Syntheticâ. Quod monuisse sufficit.

Possent hic alia Theoremata multa sigillatim ostendi, puta.

Quodlibet Curvæ Parabolicæ punctum alicujus Diametri verticem esse.

Adeoq; *In qualibet Parabola infinitos esse Vertices, atq; Diametros infinitas.*

Item; *Parabolæ Diametros omnes esse invicem Parallelas.*

Et; *Quamlibet rectam (in eodem plano) cuilibet Parabolæ Diametro parallelam, ejusdem Parabolæ Diametrum etiam esse; eiq; in uno aliquo, & quidem unico, puncto occurrere.*

Item; *Quamlibet in eodem plano rectam, per aliquod intra Parabolam punctum transeuntem, Diametro non parallelam, in binis punctis Parabolæ occurrere; & alicui Diametro Ordinatim-positam esse.*

Et; *Quæ vel alicui Parabolæ Diametro Ordinatim-posita est, vel Diametrum aliquam quocunq; modo secat, vel quæ Parabolam secat (aut ipsi occurrit) in binis punctis; nec illius Parabolæ Diametrum esse, nec ipsius Diametro ulli parallelam.*

Item; *Quæ Parabolæ Diametro alicui in vertice occurrit ordinatim-applicatis parallela, Parabolam in illo puncto contingere.*

Et; *Quæ Parabolam contingit, Diametri per contactûs punctum transeuntis Ordinatim-applicatis parallelam esse: adeoq; eidem Diametro Ordinatim positam.*

His autem, aliisq; consimilibus, sigillatim demonstrandis, non immorandum esse sentio; Cùm ea vel in progressu præcedentium Demonstrationum satis jam ostensa sint; vel ex eisdem principiis facilè demonstrari possint.

PROP. XXV.

Effectiones Geometricæ.

EX præcedentibus, non erit difficile Geometricas Effectiones colligere. puta,

Datæ Parabolæ Diametrum invenire. Nam recta, quaslibet duas inscriptas parallelas bisecans, est Diameter.

Item, *Per datum quodvis in eodem plano punctum, rectam ducere quæ sit Parabolæ datæ Diameter.* Inventa enim (ut prius) una qualibet diametro, recta huic parallela per datum punctum ducta, est Diameter quæsita.

Item, *Parabolæ Axem reperire* Inscriptâ nempe rectâ quæ Diametrum quamlibet ad angulos rectos secet; ea quæ per hujus medium punctum transit Diameter, est Parabolæ Axis.

Item, *Datæ Diametri ordinatim-applicatas positione invenire.* vel, quod tantundem est, *Angulum inclinationis invenire.* Ductis nempe binis diametro datæ parallelis rectis, utrinq; ab illa æqualiter remotis, quæ Parabolam secent; recta sectionum puncta conjungens est datæ diametro ordinatim-applicata, reliquæq; omnes huic parallelæ.

Item, *Latus-Rectum invenire datæ in datâ Parabolâ Diametro conveniens.* Est enim Latus-rectum, Diametro-interceptæ & Or-

dinatim-applicatæ tertia continuè proportionalis.

Item, *Ad datum datæ diametri punctum ordinatim-applicatam in data Parabolâ ducere.* Est enim interceptæ-diametro & lateri-recto media proportionalis, Diametro, juxta inclinationis angulum, applicanda.

Item, *Ad datam diametrum, datumq; Latus-rectum, Parabolam in dato inclinationis angulo ducere.* Nam positis ad datam Diametrum in dato angulo quolibet ordinatim-applicatis, curva per earum omnium extremitates æquabiliter ducta est Parabola.

Verum ego harum omnium effectionum demonstrationes omitto; partim ut tædio non sim, partim ut sit quo se exerceant tyrones, præsertim cum illæ ex prædictis facilè possint elici. Atq; eisdem de causis multa alia & Theoremata & Problemata lubens prætereo; cùm nobis non sit animus vel singulis minutiis insistendi, vel propositiones citra necessitatem multiplicandi. Quod etiam de sequentibus intelligendum erit.

PROP. XXVI.

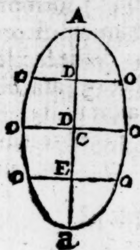
De Ellipsi absolute consideratâ.

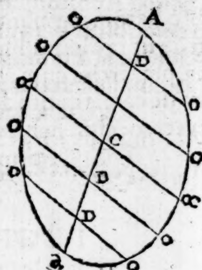
CUm sit in Ellipsi (ut ostensum est, prop. 16.) Quadratum ordinatim-applicatæ $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$ Licebit jam (ut prius Parabolam, sic) Ellipsin eo charactere insignitam, suo Cono eximere, atq; absolutè quidem & universaliter contemplari, acsi nullam omnino ad Conum relationem haberet; ut nec circulus (quæ quidem una est Ellipseos species) habere vulgò censetur.

Ellipsin igitur appello eam (sive lineam curvam in plano descriptam, sive figuram planam ejusmodi curvâ terminatam,) cujus ordinatim-applicatarum singularum quadrata, æquantur differentiis binorum rectangulorum; quorum quidem Majora sunt interceptis-Diametris, Minora vero earundem quadratis proportionalia. (Nempe $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$. Sunt enim re-

ctangula ld, ipsis d diametris interceptis proportionalia, propter communem altitudinem l: ipsa vero $\frac{l}{t}d^2$ diametrorum interceptarum quadratis d^2 proportionalia, propter communem rationem $\frac{l}{t}$.)

Diametrum, *Diametros-interceptas*, *Verticem*, *Ordina-*





tim-positas, *Ordinatim-inscriptas*, (sive *Ordinatim-subtensas*,) *Ordinatim-applicatas*, atq; *Punctum-applicationis*; eodem sensu hic accipio quo suprà de Parabolâ iisdem usus sum.

Rectam notâ l insignitam, (lineam puta imaginariam, quæ cum interceptis-diametris, continere supponitur rectangula Majora, diametris-interceptis proportionalia,) appello *Latus-Rectum*.

Rectam verò alteram, quæ nota t designatur, (quam quidem supponimus Diametri segmentum esse, a vertice versus concavam Curvæ partem ductam; quæq; ita se habet ad latus rectum ut diametrorum-interceptarum quadrata ad rectangula Minora, illis quadratis proportionalia,) *Diametrum transversam* appello; (ut quæ oppositos vertices conjungit, puta Aa, ut mox dicetur:) ejusq; punctum medium, (quod

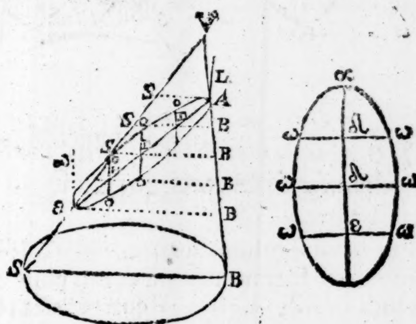
in

in ipsa Diametro intra Ellipsin jacere supponimus, nempe intra oppositos vertices,) appello *Centrum*.

Ellipsin a nobis definitam eandem esse cum ea quam definit Apollonius, (nisi quod nos etiam circulum, seu circuli Peripheriam, eâdem voce includamus, quam excludit Apollonius;) eodem fere progressu demonstrari potest, quo supra ostendimus Parabolam nostram eandem esse atq; illius.

Nempe, Ellipsi Apollonianæ, Sectione Coni factæ (quæ ab Apollonio describitur p. 13. lib. 1. Con.) universaliter convenire definitionem nostram; jam probatum est prop. 13 & 16.

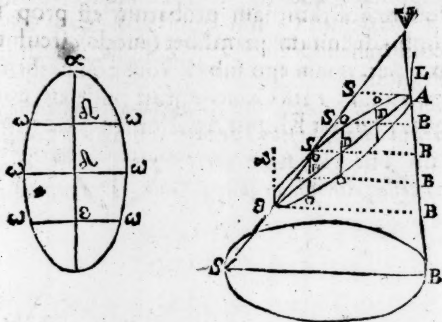
Ellipsin a nobis definitam quamlibet (modò circulum seu Peripheriam excipias, quam ego sub eâ voce comprehendo, contra quàm Apollonius,) ita Cono aptari posse ut conditiones eas habeat quas postulat Ellipsis Apolloniana; sic probatur.



Exponatur Ellipsis quælibet a nobis definita, *αω*, cujus ordinatim-applicatarum quadrata sint $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$. Dico hanc Cono ita aptari posse ut postulatur.

Ducantur enim rectæ Aa $= t$, AS $= l$, continentes angulum SAa quemcunq; acutum, (modo major sit complemento anguli inclinationis in Ellipse exposita, quem faciunt ordinatim-applicatæ

applicatæ cum expositâ diametro;) ipsiq; AS parallela ponatur aB=Aa=l, angulum faciens AaB=SAa: (saltem tantæ sint longitudinis AS,aB, ut sit AS×aB=lt; modo interim non sint AS, aB, invicem æquales; eo enim casu non Conus, sed Cylindrus prodiret:) Et jungantur rectæ aS, BA, quæ continuatæ coeant in V, complentes triangulum VaB, (si nempe aB major sit quam AS, prout jam supponimus; vel, si secus, triangulum VAS:) quod esto triangulum per axem Coni mox construendi.



Deinde super rectas Aa, aB, duo plana ita erigantur ut communis earum sectio aω faciat cum rectâ aB angulum rectum, cum rectâ verò Aa angulum æqualem angulo inclinationis Ellipseos propositæ. Hoc enim omnino fieri posse constat: Si enim erigatur in puncto a recta aω, quæ sit recta plano trianguli, (adeóq; utrosq; angulos ωaA, ωaB, rectos faciat per 3 d 11,) circumvolvatur circa rectam aB ut axem, invariato angulo ωaB, donec ad situm plani VaB perveniat, faciatq; in plano trianguli angulum ωaA acutum; qui minor erit angulo (acuto, intellige, nisi uterq; rectus sit,) inclinationis Ellipseos expositæ, (cum sit, ex constructione, angulus AaB complemento inclinationis major;) necesse est ut in transitu aliquando fecerit angulum, inclinationis angulo æqualem, (factus enim est transitus ab angulo recto, adeoq; debito majori, vel saltem æquali, ad angulum debito minorem;) adeoq; tunc fuerit in situ debi-

to

to, ut sit duorum planorum communis sectio qualis imperatur.

In plano autem $a\alpha B$ sic posito, scribi intelligatur circulus diametrum habens aB, qui sit basis Coni; aliiq; huic paralleli conum complentes, juxta prop 5; qui plano $A\alpha a$ sectus Ellipsin exhibebit, per prop. 7. cujus ordinatim-applicatæ eandem ad Diametrum inclinationem habebunt, quam quæ in Ellipsi expositâ, adeóq; similiter positæ sunt; eruntq; etiam longitudine æquales, ut probari poterit per prop. 13 & 16. Congruunt igitur Ellipsis exposita, & quæ in Cono exhibetur. Adeóq;, eadem est Ellipsis a nobis definita (nisi quod nos etiam circulum ea definitione comprehendamus) atq; Ellipsis Apollonii. Quod erat demonstrandum.

Sed & eadem opera docuimus, *Conum construere, eiq; datam Ellipsin ita aptare, ut data Ellipseos Diameter fiat Diameter-ex-generatione.* Atq; etiam Theorematice verum esse, *Ellipseos diametrum quamlibet, fieri posse, in aliquo saltem Cono, Diametrum-ex generatione.*

PROP. XXVII.

De Ellipseos Diametro-transversa & Verticibus-Oppositis.

SI Ellipseos Diameter-intercepta AD intelligatur (a vertice A versus concavam curvæ partem) tanta assumi, ut rectæ quam t diximus sit æqualis, (hoc est, ita se habeat ad latus rectum, ut interceptarum-diametrorum quadrata ad Rectangula quæ diximus Minora) erit & reliquus ipsius terminus D in Ellipseos curvâ. (Nam si $d=t$, erit $\frac{l}{t}d^2=\frac{l}{d}d^2=ld$; ideoq; $e^2=ld-\frac{l}{t}d^2=ld-ld=0$. hoc est, Ordinatim-applicata evanescit, puncto nimirum perimetri cum puncto diametri coincidente.)

Unde patet; Quamlibet Ellipseos Diametrum binos habere vertices, (ut quæ in binis punctis perimetro occurrit;) quos *Vertices Oppositos* appellamus. Diameter

ter verò binis illis verticibus terminata, illa est quam *Diametrum-transversam* jam diximus.

Sed & inde liquet, Ellipsin ex earum curvarum numero esse quæ in se recurrunt, adeóq; figuram comprehendunt.

Ellipseos autem Diameter-intercepta, diametro-transversâ, longior esse non potest; tunc enim $\frac{l}{t}d^2$, quod binorum rectangulorum minus esse supponitur, majus esset quã ld, quod supponitur eorum majus esse. Si autem tale quid supponeretur; pro Ellipsi, prodiret Hyperbola, eandem habens diametrum transversam, verticem verò eum qui est assumpto (in Ellipseos diametro-transversa) vertex oppositus; quíq; supponitur Ellipseos diameter intercepta (transversa major) erit aggregatum diametrorum transversæ & interceptæ in Hyperbola. Prout ex Hyperbolæ doctrina, post-tradenda, colligi poterit.

PROP. XXVIII.

Corollaria.

P*Atet ex præmissis*; Cùm sit $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$ Horum in Ellipsi quatuor, *Diametri-transversæ*, *Diametri-interceptæ*, *Lateris-Recti*, & *Ordinatim-applicatæ*; datis tribus quibusvis, etiam & reliquum (magnitudine) dari. Nempe (disponendo & resolvendo æquationes) erit.

In Ellipsi:

- Ordinatim-applicata, $e = \sqrt{:} \, ld - \frac{l}{t}d^2 : = \sqrt{:} \, \frac{td - d^2}{t} l.$
- Ejusq; quadratum, $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2 = \frac{td - d^2}{t} l.$
- Latus rectum, $l = \frac{e^2}{td - d^2} t.$
- Diameter-transversa, $t = \frac{td - d^2}{e^2} l.$
- Diameter-intercepta, $d = \frac{1}{2}t \pm \sqrt{:} \, \frac{1}{4}t^2 - \frac{t}{l}e^2.$

Et propterea, Distantia puncti applicationis a Centro, $c=\sqrt{:\ \frac{1}{4}t^2-\frac{t}{l}e^2}$.

Patet etiam; Ut Diameter-transversa ad Diametrum-interceptam, sic esse Rectangula quæ diximus Majora (diametris interceptis proportionalia) ad Rectangula quæ diximus Minora (earum quadratis proportionalia,) nempe, $t.\ d::ld.\frac{l}{t}d^2$.

Item; Ut Diameter-transversa ad Latus-rectum, sic quadrata Diametrorum-interceptarum ad Rectangula Minora, (quadratis illis proportionalia.) Nempe $t.l::d^2.\ \frac{l}{t}d^2$.

Item; Ut Diameter-transversa, ad interceptam; sic transversæ residuum, ad quartam; quæ, ducta in Latus-rectum, Rectangulum efficit æquale Quadrato Ordinatim applicatæ. Nempe $t.\ d::t-d.\ \frac{t-d}{t}d=\frac{td-d^2}{t}$. Et $\frac{td-d^2}{t}l=e^2$.

Item; Ut Diameter-transversa, ad Latus-rectum; sic Rectangulum segmentorum transversę, ad Quadratum Ordinatim-applicatę. Nempe $t.\ l::td-d^2.\ \frac{td-d^2}{t}l=e^2$.

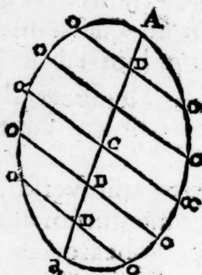
Vel; Ut Rectangulum segmentorum Diametri-transversę, ad Quadratum Ordinatim-applicatę; sic esse Diametrum-transversam ad Latus Rectum. (Unde cujuslibet ellipseos Latus-Rectum commodè reperitur.) Nempe $td-d^2.\ e^2::t.\ l=\frac{e^2}{td-d^2}t$.

Inde sequitur; Quadrata Ordinatim-applicatarum esse Rectangulis segmentorum Diametri-transversę proportionalia. Sunt enim ubiq; ut l ad t.

Adeoq;, Omnium ad eandem Diametrum-applicatarum, eam esse maximam quę diametri-transversę

puncto medio (quod Centrum diximus) applicatur ut Cα. (Quoniam nempe omnium rectangulorum ejusdem rectæ segmentis comprehensorum, illud maximum est quod bisegmentis comprehenditur; hoc est, quadratum semissis.) Nempe, ubi $d = \frac{1}{2}t = t - d$, erit $td - d^2 = \frac{1}{4}t^2$. ideoq; e^2 $(= \frac{td - d^2}{t} l) = \frac{1}{4}tl$, quadratum Ordinatim-applicatæ maximę.

Reliquarum vero Ordinatim-applicatarum quadrata (adeóq; & ipsæ Ordinatim-applicatæ) quæ centro propiùs applicantur sunt remotioribus majora, quæ autem habent applicationum puncta α centro æqualiter remota sunt invicem æqualia. Esto enim distantia puncti applicationis a centro quælibet CD$=c$, ideoq; segmenta diametri-transversæ $\frac{1}{2}t + c$, $\frac{1}{2}t - c$; erit eorum rectangulum $\frac{1}{4}t^2 - c^2$ $(= td - d^2;)$ & e^2 $(= \frac{td - d^2}{t} l) = \frac{\frac{1}{4}t^2 - c^2}{t} l$: adeoq; prout quantitas c augetur, ordinatim-applicata minuitur (non quidem proportionaliter, minuitur tamen, ut patet;) & contra; omnium vero maxima quæ centro applicatur (ut dictum est) ubi c evanescit propter coincidentiam punctorum C, D.



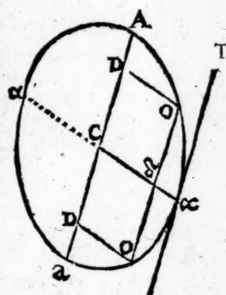
Quodq;

Quodq; de Ordinatim-Applicatis dictum est idem & de Ordinatim-inscriptis (utpote applicatarum duplis) intelligendum est; nempe eam esse maximam quæ per centrum ordinatim-inscribitur; & reliquarum quidem centro propiores remotioribus majores; & æqualiter utrinq; a centro remotas æquales esse.

PROP. XXIX.

De Ellipseos Diametris conjugatis.

Recta Diametro Parallela, ut αT, per illius quæ diametri-transversę puncto medio seu centro Ordinatim-applicatur (quę omnium maxima est, ut ostensum est; estq; ad easdem partes unica, ut patet,) extremitatem ducta; Ellipsin in illo puncto (& quidem solo) contingit. (Secus enim non esset illa omnium, versus easdem partes, Ordinatim-applicatarum maxima.)



Omnes autem, huic contingenti parallelę, (puta OδO) eidem Ellipsi inscriptę, ab illâ (quam diximus) ordinatim-applicatâ maximâ (ad perimetrum utrinq; continuatâ, ut αCα) bisecantur; adeoq; & ipsa est (per def.) ejusdem ellipseos diameter: oppositos-vertices habens αα.

Cum enim Ordinatim-applicatæ DO DO sint (propter parallelas) æquales, æqualiter distabunt a Centro applicationum puncta D D (ut modo ostensum est) adeoq; bisecantur tam DD in C, quam OO in δ: (propter parallelas:) estq; αδ diameter, eiq; ordinatim-applicantur δO, CA.

Duas vero hujusmodi (ejusdem ellipseos) diametros, (puta Aa, αα) sibi mutuo ordinatim-positas, *Diametros Conjugatas* dicimus, (quę se mutuo bisecant in communi centro C;) punctáq; Aα, vel aα, *conjugatos vertices* (in Conjugatis quippe diametris repertos) appellamus.

Ellipsin autem binis Diametris Conjugatis, earumq; quatuor verticibus sic instructam, possumus quidem quasi pro quatuor sive Ellipsibus sive Sectionibus habere, quarum quælibet suum habet verticem, suamq; Diametrum, eiq; Ordinatim-applicatas & Latus-rectum. Quarum quidem quatuor, binas αAα, αaα, *Oppositas* dicas, (ut & Aαa, aαA,) quarum nempe vertices sunt oppositi; binas verò αAα, Aαa, vel Aαa, αaα, (quarum vertices sunt conjugati, utpote in conjugatis diametris positi,) *Conjugatas* dicas.

Quamvis enim *Sectionum Oppositarum* & *Conjugatarum* nomine, *Hyperbolæ* ut plurimum intelligi soleant: nihil tamen impedit quo minùs (ut Hyperbolas, sic) *Ellipses* Oppositas & Conjugatas dicamus: vel saltem (si id nominis displiceat) Ellipsin dicamus *Opposito* & *Conjugato* situ consideratam. Id saltem interest inter quatuor Sectiones Hyperbolicas, totidemq; Ellipticas, (conjugatis Diametris accommodatas,) quod hæ quidem (productæ) se mutuò continuant (adeóq; Ellipsis tota ad quemvis quatuor verticum referri poterit,) illæ autem non ita. Verùm hæc melius fortasse percipientur quum deinceps de Hyperbolis Oppositis & Conjugatis dictum erit.

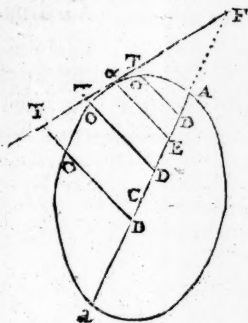
Interim notandum est, Oppositarum sive Ellipseωn sive Verticum (perinde enim est utrum dicatur,) Diametrum transversam communem esse, & quidem Latera-recta æqualia, (vel, si mavis, idem; nos enim de lateris-recti situ nullam prorsus considerationem habemus, sed solummodo de ipsius magnitudine, neq; enim omnino refert vel ubi, vel an omnino scribatur aut scribi intelligatur,) & quidem easdem Ordinatim-applicatas; Diametros-interceptas verò oppositas habent, quæ quidem simul æquantur diametro-interceptæ.

PROP. XXX.

De recta Ellipsin-Contingente.

RECta Ellipsin contingens in conjugatarum Diametrorum alterutrius Vertice, cum reliquâ (quantumvis utraq; producatur) nunquam concurret, (utpote quę ipsi parallela est, ut modo ostensum erat.) Quæ verò Ellipsin contingit recta, alibi quàm in conjugato vertice, cum diametro (productâ) concurret quidem. Punctum autem concursus sic inquiremus.

Supponatur Tangens αF, occurrens in F, productæ diametro EA, cui ordinatim-applicata sit Eα. Supponatur etiam ubivis Ordinatim-applicata DO, Tangenti occurrens in T. Sitq; centrum C, & Oppositi vertices Aa; quorum supponatur A puncto E propior, a remotior.



Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $E\alpha = e$, $EA = d$, $Aa = t$, (ideóq; $Ea = t - d$, $EC = \frac{1}{2}t - d$,) $EF = f$, $ED = a$, (ideoq; $DF = f \pm a$, $DA = d \pm a$, $Da = t - d \mp a$.)

Tum (quia quadrata ordinatim-applicatarum sunt rectangulis segmentorum Diametri-transversæ proportionalia, ut ostensum est prop. 28) erit $EA \times Ea . DA \times Da :: E\alpha q . DOq$ hoc est, $td - a^2 . td - d^2 - a^2 \pm ta \mp 2da :: e^2 . \frac{td - a^2 - a^2 \pm ta \mp 2da}{td - a^2} e^2 = DOq$.

Item (propter similia triangula) $EF . E\alpha :: DF . DT$. hoc

eſt, $f.e::f\pm a.\ \frac{f\pm a}{f}e=$ DT ejúſq; quadratum $\frac{f^2+a^2\pm 2fa}{f^2}e^2$ $=$DTq.

Tum (propter Tangentem) DTq $\geqq$ DOq (nempe æqualia, ſi D E puncta coincidant; vel, ſi ſecus, illud majus,) hoc eſt, $\frac{f^2+a^2\pm 2fa}{f^2}e^2 \geqq \frac{td-d^2-a^2\pm ta\mp 2da}{td-d^2}e^2$. et (utrinq; multiplicando per $\frac{td-d^2}{e^2}f^2$) erit $f^2td-f^2d^2+tda^2-d^2a^2\pm 2ftda\mp 2fd^2a \geqq f^2td-f^2d^2-f^2a^2\pm f^2ta\mp 2f^2da$. Et (deletis utrinq; $f^2td-f^2d^2$, atq; dividendo per $\pm a$) erit $\pm tda\mp d^2a+2ftd-2fa^2 \geqq \mp f^2a+f^2t-2f^2d$.

Deniq;, ponendo D E idem eſſe punctum, (ut evaneſcat quantitas $a=$ED, adeoq; & ipſius multiplicia tda, d^2a, f^2a erit $2ftd-2fa^2=f^2t-2f^2d$. Et (dividendo per $2f$) $td-d^2=\frac{1}{2}ft-fd$. (Hoc eſt, □AEa=□CEF) vel $\frac{1}{2}t-d.t-d::d.f.$ hoc eſt, EC. Ea :: EA. EF. vel (alternando) EC.EA :: Ea.EF. Quod erat inquirendum.

Quod Theorema ſic inventum hoc eſt. Si ſit Ordinatim-applicata in ellipſi Eα, atq; ab applicationis puncto E ellipſeos diameter per propiorem verticem A continuetur ad F; ſitq;, ut diſtantia puncti-applicationis a Centro EC, ad diametrum interceptam EA, ſic reſiduum tranſverſæ-diametri Ea, ad diametrum-interceptam continuatam EF: recta αF Ellipſin in puncto α continget.

Demonſtratio (ſi opus) inſtitui poterit repetitis Analyſeos veſtigiis.

Sed & hinc concludi poteſt quod modo aliunde oſtenſum erat; nempe quod *Recta Ellipſin in diametri vertice contingens diametro conjugatæ parallela eſt eiq; nunquam occurſura.* Nam, cum ſit EC. EA :: Ea. EF. ſi (propter coincidentiam punctorum EC) prima EC nulla ſit (ſive nullius magnitudinis) quarta EF (vel CF) erit infinita (ex utravis parte ſupponatur diameter produci, ſive per A, ſive per a, indifferenter enim ſe Tangens

habet

habet ad utrumq; verticem propter applicationem in centro,) hoc est, EF αF nunquam concurrent (propter infinitam distantiam suppositi puncti conversus F) adeoq; sunt parallelæ.

Patet etiam, *Interceptam-diametrum* EA (inter applicationis punctum & verticem propiorem) *ipsius continuatione* AF (inter verticem illum & tangentis cum diametro concursum) *minorem esse*. Cum enim sit, EC. Ea = EC + Ca :: EA. EF = EA + AF. Erit etiam (dividendo) EC. Ca :: EA. AF. At EC minor est quam Ca vel CA (pars toto) ergo & EA minor quam AF.

Sed & (ponendo $CA = \frac{1}{2}t = s$, & $CE = \frac{1}{2}t - d = c$, ideoq; $EA = d = s - c$, & $Ea, = t - d = s + c$) erit $EF = \frac{td - d^2}{\frac{1}{2}t - d} = \frac{s^2 - c^2}{c}$, & $CF\ (= EF + EC) = \frac{s^2}{c}$; hoc est CE. CA :: CA. CF.

Sed & hinc docemur *Rectam αF ducere quæ Ellipsin in dato puncto α contingat.* Nempe, ducta Ordinatim-applicata αE, fiat ut EG ad Ea sic EA ad EF. juncta enim Fα Ellipsin in α contingit.

Item, *A dato extra puncto F rectam ducere Fα quæ Ellipsin contingat.* Nempe, juncta FC, & continuata, (quæ Ellipsi in A α punctis occurrat,) ut habeatur F punctum in diametri Aa continuatione: Quoniam est (ut modo dictum est) EC. Ca = CA :: EA. AF. ideoq; FA. AC :: AE. EC. Si dividatur AC in E, sicut dividitur FC in A; & ducatur Ordinatim-applicata Eα; recta Fα juncta Ellipsin contingit.

Alia liceret hîc Corollaria adjungere, qualia de Parabola innuimus prop. 23. Sed ea brevitatis ergo omittenda judico.

PROP.

PROP. XXXI.

De Ellipſeos Diametris.

SI a puncto quovis α in Ellipſeos curvâ Aα, ducatur ad Centrum C recta αC; erit hæc ejuſdem ellipſeos diameter, cujus vertex α, ejúſq; Ordinatim-applicatæ rectæ ipſi αF, ellipſin in puncto α contingenti, parallelæ.

Libet hanc propoſitionem (ut prius prop. 24.) primo Analytice examinare, deinde & Synthetice demonſtrare.

Supponamus igitur rem eſſe ut perhibetur; adeóq; inſcriptam quamlibet OO tangenti αF parallelam, a recta αC (per contactum & centrum tranſeunte) biſectam in E. Síntq; rectæ OD, OD, αE, diametro AE ordinatim-applicatæ, adeóq; invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur Ee eidem diametro in e occurrens, quæ propterea (ob parallelas) biſecabit (ut OO in E, ſic) DD in e. Deniq; recta OO, diametro AE, (utriſq; ſi opus eſt productis,) occurrat in G. (Saltem ſi parallela ſit, ut non poſſit occurrere; res ipſa jam demonſtrata eſt, Prop. 29.)

Supponemus etiam inpræſentiarum, verticum A a (diametri AE,) verticem A propiorem, a remotiorem, Puncto E: Item punctum E intra puncta α C incidere: rectamq; OO diametro AE productæ extra Ellipſin occurrere: Si autem horum alicui contrarium contingat (quod quidem fieri poteſt) nihilo tamen minus res ſuccedet, mutatis tantum aliquoties ſignis + −, quod operationis progreſſum neutiquam turbabit.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $E\alpha = e$, $EA = d$,

$=d$, Aa$=t$, Ea $(=t-d)=x$, EC $(=\frac{1}{2}t-d,)=c$, eD $=q$, $\varepsilon\alpha=\delta$, $\alpha C=\sigma$, $2\sigma-\delta=\xi$, $\varepsilon C\ (=\sigma-\delta)=\gamma$.

Tum (per præced.) EC. EA : : Ea. EF. hoc est $c.\ d::x.\ \frac{dx}{c}=$ EF. Et (propter parallelas, & similia triangula) $C\alpha.\ \varepsilon\alpha$: : CE. eE. hoc est $\sigma.\ \delta::c.\ \frac{\delta c}{\sigma}=$ eE. Et $C\alpha.\ C\varepsilon::E\alpha$ $e\varepsilon$: : EF. eG. hoc est, $\sigma.\ \gamma::e.\ \frac{\gamma e}{\sigma}=e\varepsilon::\frac{dx}{c}.\ \frac{\gamma dx}{\sigma c}=$ eG. ideoq; DG $(=\text{eG}\pm\text{eD})=\frac{\gamma dx}{\sigma c}\pm q$. Item eA $(=\text{eE}+\text{EA})=d+\frac{\delta c}{\sigma}$, & ea $=x-\frac{\delta c}{\sigma}$ ideoq; DA $(=\text{eA}\pm\text{eD})$ $=d+\frac{\delta c}{\sigma}\pm q$, & Da $=x-\frac{\delta c}{\sigma}\mp q$ Et rectangulum DA $\times$ Da $=\frac{\sigma^2 dx-\sigma^2 q^2\pm\sigma^2 xq\mp\sigma^2 dq\mp 2\sigma\delta cq+\sigma\delta xc-\sigma\delta dc-\delta^2 c^2}{\sigma^2}$

(vel, quia $x-d=2c$) $=\frac{\sigma^2 dx-\sigma^2 q^2\pm 2\sigma^2 cq\mp 2\sigma\delta cq+2\sigma\delta c^2-\delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel, quia $\sigma-\delta=\gamma$, & $2\sigma-\delta=\xi$,) $=$ $\frac{\sigma^2 dx-\sigma^2 q^2\pm 2\sigma\gamma cq+\delta\xi c^2}{\sigma^2}$

Deinde, (quia, propter Ellipsin, Quadrata ordinatim applicatarum sunt rectangulis segmentorum diametri transversæ proportionalia) EA $\times$ Ea $=dx$. DA$\times$Da : : Eαq$=e^2$. DOq. $=\frac{\sigma^2 dx-\sigma^2 q^2\pm 2\sigma\gamma cq+\delta\xi c^2}{\sigma^2 dx}e^2$.

Item (propter similia triangula) EF. Eα : : DG. DO. hoc est $\frac{dx}{c}.\ e::\frac{\gamma dx\pm\sigma cq}{\sigma c}.\ \frac{\gamma dx\pm\sigma cq}{\sigma dx}e=$ DO. ejusque quadratum $\frac{\gamma^2 d^2 x^2+\sigma^2 c^2 q^2\mp 2\sigma\gamma dxcq}{\sigma^2 d^2 x^2}e^2.=$ DOq $=$ $\frac{\sigma^2 dx-\sigma^2 q^2\pm 2\sigma\gamma cq+\delta\xi c^2}{\sigma^2 dx}e^2$.

Ideoq; (utrinq; multiplicando per $\sigma^2 d^2 x^2$ & dividendo per ι^2) $\gamma^2 \iota^2 x^2 + \sigma^2 \iota^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dxcq = \sigma^2 d^2 x^2 - \sigma^2 dxq^2 \pm 2\sigma\gamma dxcq + \delta\xi dx\iota^2$. Et (delendo utrinq; $\pm 2\sigma\gamma dxcq$, & trans ponendo) $\sigma^2 \iota^2 q^2 + \sigma^2 dxq^2 = \sigma^2 d^2 x^2 - \gamma^2 d^2 x^2 + \delta\xi dxc^2$. Et (quia $\sigma^2 - \gamma^2 = \delta\xi$, per 5 e 2) $\sigma^2 \iota^2 q^2 + \sigma^2 dxq^2 = \delta\xi d^2 x^2 + \delta\xi dx\iota^2$. Et (dividendo utrinq; per $dx + \iota^2 = \frac{1}{4} t2$) $\sigma^2 q^2 = \delta\xi dx$. hoc est $\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2} = q^2$. Constat ergo propositum.

Illud Synthetice sic demonstratur, (repetitis Analyseos vestigiis.) Ab Ellipseos centro C ducatur recta Cα, atq; Ellipsin in puncto α contingat recta αF, diametro cuilibet CA occurrens in F; ipsiq; parallela quælibet OO rectæ Cα (intra Ellipsin) occurrens in ε, diametroq; CA in G; Diametro autem CA ordinatim-applicetur αE, eiq; parallela εe, diametro occurrens in e. Eademq; maneant symbola quæ prius $c, d, t, x, \iota, \delta, \sigma, \xi, \gamma$.

Sumantur autem in diametro utrinq; a puncto e æquales rectæ eD$= \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$; atq; ordinatim-ponantur DO, DO, rectæ OO occurrentes in O O. Adeoq; bisecantur tam DD in e (per constructionem) quàm OO (propter parallelas) in ε.

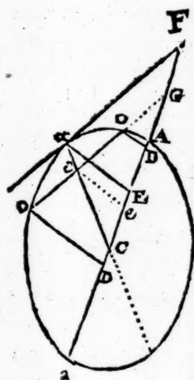
Dico rectam illam quamlibet OO (a rectâ Cα bisectam in ε) Ellipsi inscriptam esse; hoc est puncta O O esse in perimetro. Quod sic probatur.

Quoniam sunt (ut in Analysi demonstravimus) EF$= \frac{dx}{c}$, eG$= \frac{\gamma dx}{\sigma c}$, eA$= d + \frac{\delta c}{\sigma}$ & ea $= x - \frac{\delta c}{\sigma}$: Erit DG ($=$ eG $\pm$ eD) $= \frac{\gamma dx}{\sigma c} \pm \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$; & DA $= d + \frac{\delta c}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$, & Da $= x - \frac{\delta c}{\sigma} \mp \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$; atque horum rectangulum DA$\times$Da$=$ $\frac{\sigma^2 dx + \delta\xi\iota^2 - \delta\xi\delta x \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2}$. (nempe, pro q & q^2 in analysi, substituendo $\frac{\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2}$ & $\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}$.) vel (quia $\sigma^2 - \delta\xi =$

γ^2 per 5 e 2) erit DA$\times$Da $= \frac{\gamma^2 dx \pm \delta\xi c^2 + 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2}$.

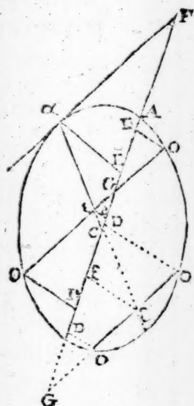
Tum (propter ſimilia triangula) erit EF. Eα : : DG. DO. hoc eſt, $\frac{dx}{c} . e : : \frac{\gamma dx \pm c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma c} . \frac{\gamma dx \pm c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma dx} e =$ DO. ejúſq; quadratum $\frac{\gamma^2 d^2x^2 + \delta\xi dx\, c^2 \pm 2\gamma dx c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2 u^2 x^2} e^2 =$ $\frac{\gamma^2 dx + \delta\xi c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi \delta x}}{\sigma^2 dx} =$ DOq.

Sed & tantundem eſt quadratum Ordinatim-applicatæ puncto D. Nam (propter Ellipſin) ut rectangulum EA$\times$Eα, ad rectangulum DA$\times$Da; ſic (Eαq) quadratum Ordinatim-applicatæ in E, ad quadratum ordinatim-applicatæ in puncto D. hoc eſt $dx . \frac{\gamma^2 x + \delta\xi c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2} : : e^2 . \frac{\gamma^2 dx + \delta\xi c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2 dx} e^2$. quod igitur eſt quadratum ordinatim-applicatæ puncto D, eſtq; (ut modò oſtenſum eſt) ipſum DOq.



Et propterea DO, DO, (quæ, ex constructione, ſunt punctis DD Ordinatim-poſitæ) & Ordinatim-applicatis æqualia, adeoq; puncta OO, ſunt in perimetro; rectaq; OO eſt Ellipſi inſcripta: ſed & illa (eiq; parallelæ, eâdem ratione,) a rectâ αC biſecatur, adeóq; ordinatim-inſcripta eſt, ejúſq; ſemiſſis eO diametro αC ordinatim-applicata. Quod erat demonſtrandum.

Notandum autem eſt (tam quoad Analyſin quam Syntheſin) fieri quandoque poſſe (ubi recta OO longius abeſt a tan-



gente αF) ut punctum G vel intra Ellipsin accidat vel etiam ultra oppositum verticem: Sed nihil hinc continget quod operationis progressum multum perturbet; tantùm mutanda forsan erunt aliquoties signa + —, aut aliquæ saltem quantitates occurrent negativè interpretandæ. Sed hoc non tanti est, ut ea propter operationem istis casibus accommodandam repetam. Illud autem a quovis vel parum exercitato (sicui id operæ pretium videbitur) facile præstari possit.

Interim non erit incommodum Corollaria quædam hic subjungere, (qualia subjunximus Prop. 14. de Parabola,) puta,

Quodlibet Perimetri Ellipseos punctum alicujus diametri verticem esse.

Adeoq; , *In quâlibet Ellipsi infinitos esse vertices, atq; Diametros infinitas.*

Item, *Ellipseos diametros omnes in Centro convenire.*

Et, *Rectam quamlibet per centrum transeuntem, Diametrum esse.*

Item, *Quamlibet in eodem plano rectam per aliquod intra Ellipsin punctum transeuntem alicui diametro Ordinatim-positam esse.*

Item, *Quæ diametro alicui in vertice occurrit, ipsius Ordinatim-applicatis parallela, Ellipsin in illo puncto contingere.*

Et, *Quæ Ellipsin contingit, rectam diametro per contactus punctum transeunti Ordinatim-positam esse, ejusq; Ordinatim-applicatis parallelam.*

Deniq; ; *Ellipsin, quæ diametros conjugatas æquales atq; ad angulos rectos positas habet, Circulum esse.*

Hæc autem, aliaq; innumera, vel satis in præcedentibus demonstrantur, vel inde saltem facile demonstrari poterunt.

PROP.

PROP. XXXII.

Effectiones Geometricæ.

ATq; ex dictis ſatis intelligere licet Geometricam Problematum effectionem. Puta,

Ellipſeos Diametrum invenire. Quæ enim duas quaslibet inſcriptas parallelas biſecat eſt diameter.

Ellipſeos Centrum invenire. Nempe in duarum quarumlibet diametrorum concurſu.

Ellipſeos diametrum invenire, quæ per datum punctum tranſeat. Rectam nempe, quæ datum punctum & centrum conjungit.

Datâ in Ellipſi diametro quâlibet, diametrum conjugatam invenire. Vel generaliter.

Datâ inſcripta quâlibet, diametrum invenire cui illa ordinatim ponitur. Nempe rectam quæ datam inſcriptam aliámq; ipſi parallelam biſecat: Vel (ſi diameter non ſit) quæ ipſius punctum medium, & Ellipſeos centrum conjungit.

Datæ Ellipſeos Axes invenire. Nempe deſcribatur Peripheria Ellipſi concentrica, ipſamq; ſaltem in binis punctis ſecans: Rectam enim bina puncta proxima conjungentem quæ biſecat recta, eſt Axium alter; reliquusq; eſt huic conjugatus.

Nota tamen; *In circulo omnes Diametros Axes eſſe, & quidem æquales; & conjugatas ipſius diametros omnes eſſe conjugatos Axes. In aliis autem Ellipſibus quibuſvis, non niſi duos Axes reperiri; eoſq; Conjugatos, ſed & inæquales; & quidem conjugatarum diametrorum omnium maximè inæquales; quare &* Diametri-Extremæ *dici ſolent: Sicut è contra,* Diametros-Medias *dicere licet, quæ ſunt conjugatæ æquales.*

Datæ Ellipſeos ordinatim-applicatas (poſitione) invenire, quæ datæ ipſius diametro conveniunt. Inventa nempe Diametro conjugata, quæ huic æquidiſtant rectæ ſunt diametro datæ ordinatim-poſitæ.

Ellipſin ad datam diametrum & datum latus rectum deſcribere, quæ datum habeat inclinationis angulum. Nempe inventis (magnitudine) ad quotlibet diametri puncta Ordinatim-applicatis, (per prop 28.) applicentur ad ſua reſpectivè puncta in angulo imperato

rato: Per earum enim extrema puncta, curva æquabiliter ducta, est Ellipsis.

Atqui ego brevitatis causâ (præsertim cum ex dictis facilè deduci queant) harum effectionum demonstrationes, aliáq; tam Problemata quàm Theoremata plurima lubens omitto

PROP. XXXIII.

De Hyperbolâ absolutè considerata.

CUm sit in Hyperbolâ (ut ostendimus Prop. 20. inspecto Cono) Quadratum ordinatim-applicatæ $h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$. Licebit hic (ut Parabolam & Ellipsin supra) Hyperbolam eo charactere insignitam, Cono eximere, atq; absolutè & universaliter contemplari, acsi nullam ad Conum relationem habeat.

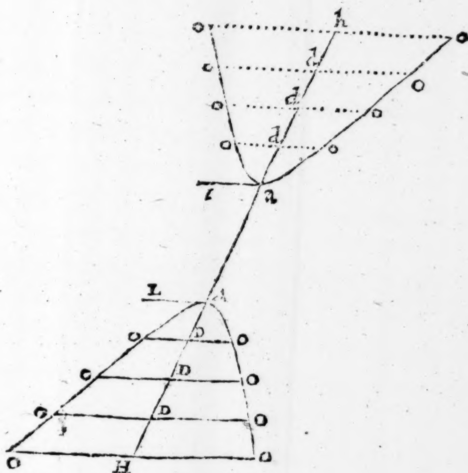
Hyperbolam igitur appello eam (sive lineam curvam in plano descriptam, sive figuram planam ejusmodi curvâ terminatam) cujus ordinatim-applicatarum singularum quadrata æquantur aggregatis binorum rectangulorum; quorum quidem altera sunt interceptis-diametris, altera earum quadratis proportionalia. (Nempe $h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$. Sunt enim rectangula ld ipsis d diametris-interceptis proportionalia, propter communem altitudinem l; rectangula vero $\frac{l}{t}d^2$ diametrorum-interceptarum quadratis d^2 sunt proportionalia, propter eandē ubiq; rationem, puta $t. l :: d^2. \frac{l}{t}d^2$ Utrum verò rectangulorum majus sit, non refert; sed modo hoc, modò illud)

Diametrum, Diametros-interceptas, Verticem, Ordinatim-positas, Ordinatim-inscriptas, Ordinatim-applicatas

catas, atq; *Punctum-applicationis*; eodem ſenſu hîc accipio quo iiſdem ſuprà de Parabola & Ellipſi uſus ſum.

Rectam nota *l* inſignitam,(lineam puta imaginariam, quæ cum interceptis diametris binorum rectangulorum illa continet quæ ſunt ipſis diametris-interceptis proportionalia) appello *Latus-Rectum.*

Rectam verò alteram, quæ notâ *t* deſignatur,(quam quidem ſupponimus Diametri ſupra verticem continuationem, verſus convexam curvæ partem ductam;



quæq; ita ſe habet ad Latus-rectum ut diametrorum-interceptarum quadrata ad binorum Rectangulorum illa quæ quadratis illis ſunt proportionalia:) *Diametrum-tranſverſam* appello, (ut quæ Oppoſitis Oppoſitarum Hyperbolarum vertices conjungit, ut poſt dicetur;) ejuſq; punctum medium (quod quidem extra Hyperbolam

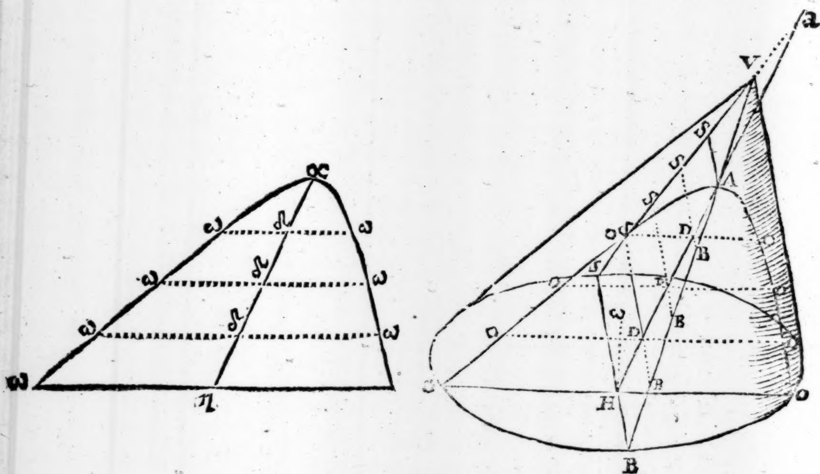
Hyperbolam jacet, sed inter Hyperbolas Oppositas, ut deinceps patebit) appello *Centrum.*

Hyperbolam a nobis definitam eandem esse cum illa quam definit Apollonius, simili fere progressu ostendemus, atq; supra de Parabolâ & Ellipsi usi sumus prop. 21, & 26.

Hyperbolæ nempe, (qualem definit Apollonius Conic. lib. 1. prop 12.) Sectione coni factæ, universaliter convenire definitionem a nobis propositam; jam probatum est prop. 17, & 20.

Contra vero, Hyperbolam a nobis descriptam ita Cono aptari posse, ut eas habeat conditiones quas postulat Hyperbola Apolloniana; sic probatur.

Exponatur Hyperbola quælibet a nobis definita a ω, cujus



Ordinatim-applicatarum quadrata sint $b^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$. Dico hanc Cono ita ut postulatur aptari posse.

Ducatur

Ducatur recta aA=t, & (in ejusdem continuatione) AH =d: Atq; ad rectam AH ponantur (ad oppositas partes) duæ rectæ invicem parallelæ; AS=l, & HB=c, (saltem tantæ sint longitudinis AS, HB, ut sit AS × HB=ld;) Sitq; angulus SAH =AHB quilibet acutus, (modo major sit complemento anguli inclinationis in Hyperbola exposita.) Juncta verò aS producatur ut cum recta BH producta coeat in S; & juncta BA producatur ut occurrat ipsi aS in V; ut compleatur triangulum VBS; quod esto Triangulum per axem in Cono construendo.

Deinde rectis AH, BHS, duo plana ita erigantur, ut communis eorum sectio HO, faciat ad rectam HB angulos rectos, ad rectam vero AH angulum AHO æqualem angulo inclinationis in Hyperbola proposita.

Hoc enim omnino fieri posse constat: Si enim recta qualibet HO perpendiculariter insistens plano Trianguli VBS (adeóq; angulos faciens utrosq; OHA, OHB, rectos) circumvolvatur circa rectam BHS ut axem (invariato angulo OHB) donec ad situm plani perveniat in Hω, faciatq; in plano trianguli angulum ωHA acutum, qui minor erit angulo inclinationis in Hyperbola, (est enim, ex constructione, angulus AHB istius inclinationis complemento major;) necesse est enim ut, in transitu, aliquando fecerit angulum inclinationis angulo æqualem; (factus enim est transitus ab angulo recto, adeóq; debito majori, vel saltem æquali, ad angulum debito minorem;) adeoq; tunc fuerit in situ debito ut sit duorum planorum prout requiritur concurrentium communis sectio.

In plano autem BOS sic posito scribi intelligatur circulus, diametrum habens BHS, qui sit basis coni; aliiq; huic paralleli diametros habentes BDS, conum complentes, (per prop. 5.) qui plano AHO sectus exhibebit Hyperbolam (per prop. 7.) cujus Ordinatim-applicatæ omnes (quarum HO est una) ad diametrum AH angulum facient æqualem angulo inclinationis ordinatim-applicatarum in Hyperbolâ exposita ad diatrum suam; sed & eisdem sunt respectivè æquales (ut patebit ex demonstratione prop. 17, & 20.) ideoq; singulæ singulis congruunt, adeóq; & Hyperbola exposita Hyperbolæ sectione coni factæ. Quod erat faciendum. Adeóq; Hyperbola a nobis

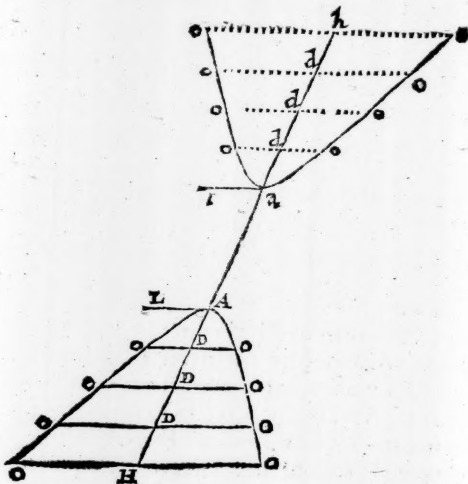
definita eadem est cum ea quam definit Apollonius. Quod erat demonstrandum.

Sed & eâdem opera docuimus *Conum construere eiq; datam Hyperbolam ita aptare, ut data ipsius diameter sit diameter-ex-generatione:* Atq; etiam Theorematice verum esse, *Hyperbolæ diametrum quamlibet fieri posse, in aliquo saltem Cono, Diametrum-ex-generatione.*

PROP. XXXIV.

De Diametro transversa, & Hyperbolis oppositis.

SI ad eandem diametrum duæ Hyperbolæ opposito situ ponantur, communem habentes diametrum-transversam, idemq latus rectum; sintq; ad illam diametrum ordinatim-applicatæ unius, ordi-



natim-applicatis alterius parallelæ: dicentur illæ *Hyperbolæ-oppositæ*; earumq; vertices, eandem diametrum-

trum-transversam terminantes, *Vertices Oppositi*: Punctumq; inter oppositos vertices medium, est utriq; Hyperbolæ centrum commune.

Hæ autem Hyperbolæ-Oppositæ, respondent Hyperbolis Oppositorum conorum eodem plano sectorum.

PROP. XXXV.

Corollaria.

P*atet ex dictis*; Cùm sit $h^2 = ld + \frac{l}{t} d$: Horum in Hyperbola quatuor, *Diametro-transversâ*, *Diametro-interceptâ*, *Latere-recto*, & *Ordinatim-applicatâ*; Datis tribus quibusvis, etiam reliquum (magnitudine) dari. Nempe (disponendo & resolvendo æquationes) erit

In Hyperbola,

- Ordinatim-applicata, $h = \sqrt{:ld + \frac{l}{t} d^2:} = \sqrt{\frac{td + d^2}{t} l}$.
  - Ejusq; quadratum, $h^2 = ld + \frac{l}{t} d^2 = \frac{td + d^2}{t} l$.
- Latus-Rectum, $l = \frac{h^2}{td + d^2} t$.
- Diameter-transversa, $t = \frac{td + d^2}{h^2} l$.
- Diameter-intercepta, $d = \sqrt{:\frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{l} h^2:} - \frac{1}{2}t$.

Adeoq; ; Diametrorum transversæ & interceptæ aggregatum, $t + d = \sqrt{:\frac{1}{4}\,^2 + \frac{t}{l} h^2:} + \frac{1}{2}t$.

Distantia puncti applicationis a centro. $c = \sqrt{:\frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{l} h^2}$.

Patet etiam; Ut Diameter-transversa, ad interceptam; sic esse binorum Rectangulorum ea quæ diametris interceptis proportionalia, ad Rectangula earum quadratis proportionalia. Nempe $t.d :: ld. \frac{l}{t} d^2$.

Item; Ut Diameter-transversa, ad Latus-rectum; ita quadrata diametrorum interceptarum, ad Rectangula quadratis illis proportionalia. Nempe $t.l :: d^2. \frac{l}{t} d^2$.

Item, Ut Diameter transversa, ad interceptam; ita utriusq; aggregatum, ad quartam; quæ, ducta in Latus-rectum, Rectangulum efficit æquale quadrato ordinatim-applicatæ. Nempe $t.d :: t+d. \frac{t+d}{t} d = \frac{td+d^2}{t}$. Et $\frac{td+d^2}{t} l = h^2 = ld + \frac{l}{t} d^2$.

Adeoq; Ut Diameter-transversa, ad Latus-rectum; sic Rectangulum sub Diametro-interceptâ & aggregato diametrorum transversæ & interceptæ, ad quadratum Ordinatim-applicatæ. Nempe $t.l :: td + d^2. \frac{td+d^2}{t} l = h^2 = ld + \frac{l}{t} d^2$.

Vel, Ut Rectangulum Diametro interceptâ, & aggregato Diametrorum transversæ & interceptæ comprehensum, ad quadratum Ordinatim-applicatæ: sic esse Diametrum-transversam ad Latus-rectum. (Unde Hyperbolæ Latus-rectum commodè reperitur.) Nempe, $td+d^2. h^2 :: t.l = \frac{h^2}{td+d} t$.

Inde sequitur; Quadrata Ordinatim-applicatarum, Rectangulis Diametro interceptâ & aggregato diametrorum transversæ & interceptæ comprehensis, esse proportionalia. Sunt enim ubiq; ut t ad l.

Adeoq; Prout longius a vertice removetur punctum-applicationis, ita semper augeri Ordinatim-applicatas

plicatas

plicatas. Nempe quia ſic tam d quam $t + d$ (diameter intercepta, & aggregatum tranſverſæ & interceptæ) augentur, adeoq; & eorum rectangula, & propterea quadrata Ordinatim-applicatarum his rectangulis proportionalia, adeóq; & ipſæ Ordinatim-applicatę.

Et propterea; Hyperbolam ex earum linearum numero eſſe, quæ figuram non claudunt; Cum Ordinatim-applicatę (a vertice inchoando) perpetuo creſcant, adeoq; & creſcat crurum divaricatio, quę idcirco nunquam ſunt deinceps coitura.

Ideoq; & Hyperbolę diametrum quamlibet non niſi in unico Verticis puncto eidem Hyperbolę occurrere; Quoniam nempe creſcentibus continuò Ordinatim-applicatis Hyperbolę curva a diametro magis continuò reſiliat, nunquam ideo deinceps coitura. Vertices enim Oppoſiti, quanquam in eâdem diametro, non tamen ſunt in eâdem Hyperbolâ, ſed in Oppoſitis.

PROP. XXXVI.

De recta Hyperbolam contingente.

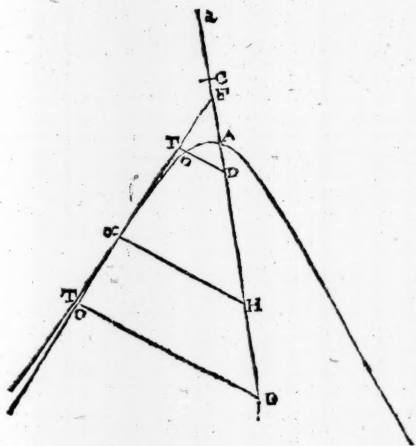
RECta Hyperbolam contingens diametro productæ inter verticem & centrum occurret. Punctum vero concurſus ſic inquiremus.

Supponatur tangens aF occurrens, in F, diametro H A productæ, eiq; ordinatim-applicata a H. Supponatur etiam ubivis eidem diametro Ordinatim-applicata D O, tangenti Occurrens in T. Sitq; A vertex, C centrum.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) H$a = b$, HA $= d$, A$a = t$, (ideoq; H$a = t + d$, HC $= \frac{1}{2}\, t + d$,) HF $= f$, HD $= a$, (ideoq; DF $= f \pm a$, DA $= d \pm a$, D$a = t + d \pm a$.)

 Tum

Tum (quia, propter Hyperbolam, quadrata Ordinatim-applicatarum sunt rectangulis AHa proportionalia, ut modo ostensum est) erit HA×Ha. DA×Da : : Hαq. DOq. hoc est, $td + d^2$. $td + d^2 + a^2 \pm ta \pm 2da : : b^2$. $\frac{td + d^2 + a^2 \pm ta \pm 2da}{tu + d^2} b^2$



Et (propter similia triangula) HF. Hα : : DF. DT. hoc est $f. h : : f \pm a$. $\frac{f \pm a}{f} h =$ DT. ejusq; quadratum $\frac{f^2 + a^2 \pm 2fa}{f^2} h^2$ = DTq.

Tum (propter tangentem) DTq ⋝ DOq (nempe æqualia si D H coincidant; vel, si secus, illud majus;) hoc est, $\frac{f^2 + a^2 \pm 2fa}{f^2} h^2 ⋝ \frac{td + d^2 + a^2 \pm ta \pm 2da}{tu + d2} b^2$. & (utrinq; multiplicando per $\frac{tu + d2}{b^2} f^2$) erit $f^2td + f^2d^2 + tda^2 + d^2a^2 \pm 2ftda \pm 2fd^2a ⋝ f^2tu + f^2d^2 + f^2a^2 \pm f^2ta \pm 2f^2da$. Et (deletis utrinq; $f^2td + f^2d^2$) erit $tda^2 + d^2a^2 \pm 2ftda \pm 2fd^2a ⋝ f^2a^2 + f^2ta \pm 2f^2da$. Et (dividendo per $\pm a$) erit $\pm tda \pm d^2a + 2ftu + 2fd^2 ⋝ \pm f^2a + f^2t + 2f^2d$.

Deniq;, ponendo D H idem esse punctum (ut evanescat quantitas

quantitas a, adeoq; & ipsius multiplicia tda, d^2a, f^2a) erit $2fta + 2fa^2 = f^2t + 2f^2d$. Et (dividendo per $2f$) $ta + a^2 = \frac{1}{2}ft + fd$: (hoc est □ AHa = □ CHF;) vel $\frac{1}{2}t + d.\ t + d :: d.\ f = \frac{t+d}{\frac{1}{2}t+d}d$. Hoc est HC. Ha :: HA. HF. Quod erat inquirendum.

Quod Theorema sic inventum, hoc est; Si sit ordinatim-applicata in Hyperbola Ha, atq; ab applicationis puncto H continuetur diameter H A ad F; sitq; ut distantia puncti-applicationis a Centro H C, ad aggregatum diametrorum transversę & interceptę H a; sic diameter intercepta H A, ad eandem continuatam H F. recta aF juncta Hyperbolam in puncto a continget.

Vel sic; si recta aF Hyperbolam contingat in termino ordinatim-applicatæ a; erit, ut distantia puncti applicationis H a centro H C, ad ejusdem distantiam a vertice remotiore H a; sic distantia a vertice propiori H A, ad distantiam a puncto concursus tangentis & diametri H F.

Demonstratio, si sit opus, institui poterit repetitis Analyseos vestigiis.

Sed & patet, quod, cùm sit HC. Ha :: HA. HF. hoc est HC. HC+Ca :: HA. HA+AF. erit (dividendo) HC. Ca = CA :: H A. AF. Adeoq; si sumatur (in diametro continuata) $AF = \frac{HA \times AC}{HC}$, habetur punctum F. Sed etiam, cùm sit H C major quam CA, (pars toto) erit propterea HA major quam AF; hoc est. *Diameter intercepta, major quam ipsius continuatio ad concursum Tangentis*; (contra quam in Ellipsi ubi minor est; et in Parabolâ, ubi æqualis; ut ostendimus prop. 23 & 30.)

Item, (ponendo $CA = \frac{1}{2}t = s$, & $CH = CA + AH = s + d = c$, ideoq; $HA = c - s$, & $Ha = c + s$) erit $HF = \frac{td + d^2}{\frac{1}{2}t + d} = \frac{c^2 - s^2}{c} = f$, & $CF = c - f = \frac{s^2}{c}$. Hoc est CH. CA :: CA. CF.

Atq;

Atq; hinc docemur, *Rectam α F ducere quæ Hyperbolam in dato puncto α contingat.* Sumpta nempe $CF = \frac{CAq}{CH}$, & quidem a C versus A, si contactus requiratur ad Hyperbolam A α, vel (eâdem ratione) a C versus a, si ad Hyperbolam opposítam.

Atq; hinc sequitur; *Rectam contingentem Hyperbolæ diametro citra centrum occurrere; puta intra centrum & verticem:* (nam quod ultra verticem sit, patet ex prædictis, cum sit HC. Ha : : HA. HF. est enim HC minor quam Ha, ideoq; & HA minor quam HF: Quòd autem sit citra centrum, patet etiam, quia, ut dictum est, HC. CA : : HA. AF, adeoq; HC. HA : : AC. AF. at HC major est quam HA, ergo AC major quam AF.)

Item, *A quovis diametri puncto F, inter Hyperbolæ verticem & centrum sumpto, duci posse rectam F α, quæ Hyperbolam contingat.* Quo autem punctum F puncto C propius sit, eo remotius abest & punctum contactus α, & punctum applicationis huic conveniens H. Quia ut CF. CA : : CA. CH.

Adeoq; si supponamus punctum F ipsi C coincidere, ut distantia CF = o nulla sit; erit propterea CH infinita; *Hoc est*, punctum H, (adeoq; & punctum α) supponendum est infinitè distare, adeoq; vel nusquam vel non nisi in Hypberola actu infinitâ reperiri.

Cumq; punctum C indifferenter se habeat ad utramq; Hyperbolarum oppositarum; ea quæ supponitur Contingens per centrum ducenda, versus utramvis partem producatur, infinita erit, adeóq; Hyperbolarum illarum neutri occurret. quæ propterea *Asymptota* dici solet, ut post dicetur.

Alia quæ adjungi possent corollaria lubens omitto.

PROP. XXXVII.

De Hyperbolæ Diametris.

SI per Hyperbolę Centrum C, punctúmq; in curvâ quodlibet α, transeat C α recta; erit illa ejusdem Hyperbolę diameter, verticem habens α,

atq;

atq; ordinatim-applicatas rectę αF hyperbolam in α contingenti parallelas.

Libet propositionem (ut prius 24 & 31.) Analytice examinare, deinde & Syntheticè demonstrare.

Supponamus igitur rem esse ut perhibetur, adeoq; inscriptam quamlibet OO tangenti αF parallelam a recta $C\alpha$ (per centrum & contactum transeunte) bisectam in ν. Sintq; rectæ OD, OD, αH, diametro HA ordinatim-applicatæ, & propterea invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur νh eidem diametro in h occurrens; quæ propterea (propter parallelas) bisecabit, (ut OO in ν, sic) DD in h. Deniq; recta OO (producta si opus) diametro HA occurrat in G: Occursuram enim omnino esse patet, quoniam αF ipsi parallela eidem diametro occurrit, per præced.

Supponemus etiam impræsentiarum, occursus punctum G contingere supra verticem A, extra Hyperbolam. Si autem secus contingat, (uti fieri potest, si inscripta OO remotius a tangente sumatur, ita ut diametrum transeat,) non tamen series operationis variabitur aliter quam vel mutanda aliquando signa + —, vel quantitatem aliquando negativè interpretandam fore, adeoq; ex parte suppositioni contrariâ, intelligendam.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $H\alpha = b$, $HA = d$, $Aa = t$, Ha $(= t + d) = z$, HC $(= \frac{1}{2}t + d) = c$, $hD = q$, $\alpha\nu = \delta$, $\alpha C = \sigma$, νC $(= \sigma + \delta) = \gamma$, $2\sigma + \delta = \zeta$.

Tum (per præced.) HC. Ha :: HA. HF. hoc est $c. z :: d. \frac{dz}{c} = HF$. Et (propter parallelas & similia triangula) $C\alpha. \alpha\nu$ :: CH. Hh. hoc est $\sigma. \delta :: c. \frac{\delta c}{\sigma} = Hh$. Et $C\alpha$ $C\nu$ :: $H\alpha$. $h\nu$ :: HF. hG. hoc est $\sigma. \gamma :: b. \frac{\gamma b}{\sigma} = h\nu :: \frac{dz}{c}. \frac{\gamma dz}{\sigma c} = hG$. ideoq; DG $(= hG \pm hD) = \frac{\gamma dz}{\sigma c} \pm q$. Item hA $(= AH + Hh) = d + \frac{\delta c}{\sigma}$, & h a $(= t + d + \frac{\delta c}{\sigma}) = z + \frac{\delta c}{\sigma}$. ideoq; DA $= d + \frac{\delta c}{\sigma} \pm q$, &

$Da = z \dagger \frac{\delta c}{e} \pm q$. Et rectangulum $DA \times Da =$

$\frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm \sigma^2 zq \pm \sigma^2 dq \pm \sigma\delta cq + \sigma\delta zc + \sigma\delta dc + \delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel quia $z+d = 2c$) $= \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma^2 cq \pm \sigma\delta cq + \sigma\delta 2c^2 + \delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel quia $\sigma + \delta = \gamma$, & $2\sigma + \delta = \xi$) $= \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\zeta c^2}{\sigma^2} =$ DA×Da.

Deinde (quia propter Hyperbolam, Quadrata Ordinatim-applicatarum sunt rectangulis diametro intercepta & aggregato diametrorum transversæ & interceptæ comprehensis proportionalia) erit HA×Ha $= dz$. DA×Da : : Hαq $= b^2$. DOq $= \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\zeta c^2}{\sigma^2 dz} b^2$.

Item (propter similia Triangula) HF. Hα : : DG.DO. hoc est $\frac{dz}{c}$. b : : $\frac{\gamma dz \pm \sigma cq}{\sigma c}$. $\frac{\gamma dz \pm \sigma cq}{\sigma dz} b =$ DO. ejusque quadratum. $\frac{\gamma^2 d^2 z^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dzcq}{\sigma^2 d^2 z^2} b^2 =$ DOq $= \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\zeta c^2}{\sigma^2 dz} b^2$.

Ideóq; (utrinq; multiplicando per $\sigma^2 d^2 z^2$ & dividendo per b^2) $\gamma^2 d^2 z^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dzcq = \sigma^2 d^2 z^2 + \sigma^2 dzq^2 \pm 2\sigma\gamma dzcq + \delta\zeta dzc^2$. Et (delendo utrinq; $\pm 2\sigma\gamma dzcq$, atq; transponendo) $\sigma^2 c^2 q^2 - \sigma^2 dzq^2 = \delta\zeta dzc^2 - \gamma^2 d^2 z^2 + \sigma^2 d^2 z^2$. Et (quia $\gamma^2 - \sigma^2 = \delta\zeta$, per 6 e 2,) $\sigma^2 c^2 q^2 - \sigma^2 dzq^2 = \delta\zeta dzc^2 - \delta\zeta d^2 z^2$. Et (dividendo utrinq; per $c^2 - dz = \frac{1}{4} t^2$) erit $\sigma^2 q^2 = \delta\zeta dz$. hoc est $\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2} = q^2$. Constat ergo propositum.

Illud Synthetice sic demonstratur. (repetitis Analyseos vestigiis) A centro C ducatur ad Hyperbolam Cα. Atq; in puncto α Hyperbolam contingat αF, diametro cuilibet HA occurrens in F; ipsiq; parallela quælibet OO, eidem diametro HA occurrens in G, & rectæ Cα (productæ) in n. Diametro autem HA ordinatim-applicetur αH, eiq; parallela nh eidem diametro occurrat in h. Eademq; quæ prius maneant symbola $h, d, t, z, c, \delta, \sigma, \gamma, \zeta$.

Sumantur autem in diametro utrinq; a puncto h æquales rectæ hD $=\sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$. atq; ordinatim-ponantur DO, DO, rectæ OO occurrentes in O O. Adeoq; bisecantur tam DD in h (per constructionem) quam O O (propter parallelas) in $\varkappa$.

Dico rectam OO (a recta C$\alpha\varkappa$ bisectam in $\varkappa$) Hyperbolæ inscriptam esse; hoc est, puncta O O esse in ipsa Hyperbolæ curva. Quod sic probatur.

Quoniam sunt (ut in Analysi demonstravimus) HF $=\frac{dz}{c}$ hG $=\frac{\gamma dz}{\sigma c}$, hA $=d+\frac{dc}{\sigma}$, & ha $=z+\frac{dc}{\sigma}$: Erit DG (= hG ± hD) $=\frac{\gamma dz}{\sigma c} \pm\sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$; item DA (= hA ± hD) $=d+\frac{dc}{\sigma}\pm\sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$, Da $=z+\frac{dc}{\sigma}\pm\sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$, & rectangulum DA×Da $=\frac{\sigma^2 dz+\delta\zeta c^2+\delta\zeta dz+2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2}$ (nempe pro q^2 & q in analysi, substituendo in synthesi $\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}$ & $\sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$.) vel (quia $\sigma^2+\delta\zeta=\gamma^2$ per 6 e 2) $\frac{\gamma^2 dz+\delta\zeta c^2+2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2}$ = DA× DA.

Tum (propter similia triangula) erit HF. Hα :: DG. DO. hoc est, $\frac{dz}{c}$. b :: $\frac{\gamma dz}{\sigma c}\pm\sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$. $\frac{\gamma dz\pm c\sqrt{d\delta\zeta dz}}{\sigma dz}b=$ DO. ejusq; quadratum $\frac{\gamma^2 d^2z^2+\delta\zeta dz c^2+2\gamma dzc\sqrt{d\delta\zeta dz}}{\sigma^2 d^2 z^2}b^2$ $=$ DOq $=\frac{\gamma^2 dz+\delta\zeta c^2+2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2 dz}b^2$.

Sed & tantundem est quadratum ordinatim-applicatæ puncto D. Nam (propter Hyperbolam) ut rectangulum HA×Ha, ad rectangulum DA × Da; sic Hαq quadratum ordinatim-applicatæ puncto H, ad quartum, quod erit quadratum ordinatim

tim-applicatæ puncto D. hoc est, $az . \frac{\gamma^2 az + \delta\zeta^2 + 2\gamma\sqrt{\delta\zeta}z}{\sigma^2}$ $:: b^2 . \frac{\gamma^2 az + \delta\zeta^2 + 2\gamma\sqrt{\delta\zeta}z}{\sigma^2 az} a^2$. quod æquale est ipsi DOq, ut modo ostendimus.

Et propterea DO, DO, (quæ, ex constructione, sicut punctis D D ordinatim positæ,) sunt & ordinatim-applicatis æquales, adeóq; puncta O O sunt in Hyperbolæ curvâ, rectaq; OO est Hyperbolæ inscripta. Sed & illa (eiq; parallelæ, eâdem ratione,) a recta C*an* bisecatur; adeóq; ordinatim-inscripta est, ejúsq; semissis *n*O diametro C*an* Ordinatim-applicata. Quod erat demonstrandum.

Notandum autem est (quod & prius monui) fieri quidem posse ut inscripta OO diametrum transeat in G intra parabolam. Quod tamen operationis progressum non aliter immutabit quam variando nonnunquam signa + — aut quantitatem negativè interpretandam exhibendo. Ut experienti patebit.

Recta autem illa αC quam Hyperbolæ Diametrum esse ostendimus, iisdem oppositis-Hyperbolis convenit quibus & AC; ipsaq; αC duplicata erit earundem Diameter-transversa. Sumatur enim in opposita Hyperbola ad=AH, hoc est Cd=CH, & ordinatim-applicetur (situ contrario) d o, quæ erit ipsi Bα æqualis & parallela (propter æquales diametros interceptas, eandem transversam, idem latus-rectum, atq; situm parallelum, per prop. 34.) adeóq; anguli alterni æquales, nempe Cdo=CDα: & propterea (juncta oC) triangula CDα, Cdo, similia & æqualia; ideóq; (propter angulos κατ' κορυφὴν ad C æquales) erit αCo una recta; atq; illa quidem in C bisecta: quæ igitur cùm ad Oppositas Hyperbolas terminetur, erit illa eorum transversa-diameter, ejúsq; medium punctum C earundem centrum.

Unde etiam liquet, *Hyperbolæ Diametros omnes in eodem communi centro convenire.*

Sed & ea omnia Corollaria (ultimo excepto) quæ ad prop. 31. de Ellipsi memorantur, iisdem fere verbis etiam Hyperbolæ conveniunt. Ut non sit opus ea repetere.

PROP.

PROP. XXXVIII.

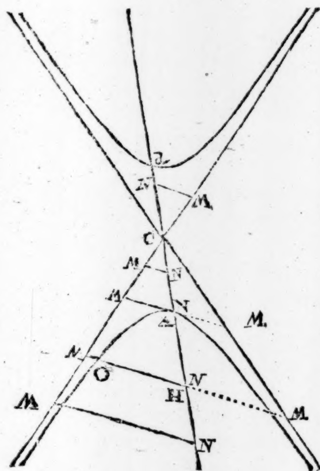
Effectiones Geometricæ.

PRoblematum effectiones quæ de Ellipsi memorantur prop. 31. eædem ferè totidem verbis etiam Hyperbolæ conveniunt. Nec opus est ut repetantur.

PROP. XXXIX.

De Hyperbolæ Asymptotis.

SI sumatur in Hyperbolæ diametro (extra centrum C) punctum quodvis N, eíq; ordinatim-ponatur N M; fiátq; *t. l* :: CNq. NMq. (hoc est, ut diameter transversa, ad latus rectum; sic quadratũ distantiæ punctorum C N, ad quadratum rectæ N M,) juncta CM erit illius Hyperbolæ *Asympto-ta*: Nempe quæ (cõtinuata) Hyperbolæ (quantumvis productæ) nunquam occurret, ita tamen continuo propius accedet ut distantia tandem evadat quâvis assignatâ minor.



Nam 1°. Sumpto (intra Hyperbolam A O) diametri puncto quovis H,

H, cui ordinatim-applicetur HO, recte CM occurrens in M. Erit (propter similia triangula) CN. NM : : CH. HM Adeoquè CNq.NMq : : ($t.l$: :) CHq $= c^2$. HMq $= \frac{l}{t}c^2 = \frac{c^2}{t}l$.

Sed (propter Hyperbolam) erit HOq $= \frac{c^2 - s^2}{t}l$ (ponendo nempe $s = \frac{1}{2}t$, ideoq; $d = c - s$, & $d + t = c + s$.) Ergo HOq minus est quam HMq, & recta HO minor quam recta HM & propterea M erit extra Hyperbolam. Recta igitur CMM (quantumvis producta) Hyperbolæ nunquam occurrit. Quod erat primo demonstrandum.

2°. Cùm sit OM ($=$ HM - HO) $= \sqrt{\frac{c^2}{t}l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$; sintq; s, l, t, quantitates stabiles, at c variabilis, & quidem tanto major quanto remotius abest punctum H a centro C: Differentia rectarum $\sqrt{\frac{c^2}{t}l}$, $\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$, hoc est, rectarum HM, HO, perpetuo minuetur prout c, hoc est, CH, augetur. Nam in majoribus quadratis æquale augmentum (retenta figuræ specie) minorem postulat lateris productionem quam in quadratis minoribus, (ut notum est.) Ideoq; prout longius abest a centro punctum H, adeoq; c^2 majus est, (reliquis interim immutatis) ita semper minuetur OM, differentia laterum $\sqrt{\frac{c^2}{t}l}$, $\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$. Et consequenter distantia rectæ CMM ab Hyperbolæ curva AO, continue decrescit. Quod erat secundò demonstrandum.

3°. Sit assignata distantia quælibet quantumvis exigua, puta $2a$; Dico Hyperbolam AO rectamq; CM eò produci posse, ut earum distantia minor evadat quam est assignata $2a$. Sumatur enim linea recta aliquanto minor, puta a, cui æqualem esse volumus rectam OM; & quærendum sit punctum H (cui ordinatim-ponenda sit HOM) seu longitudo rectæ CH. Quoniam igitur supponimus $a =$ OM $= \sqrt{\frac{c^2}{t}l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$; erit (transponendo) $\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l} = \sqrt{\frac{c^2}{t}l} - a$; & (utrinquè

qua-

quadrando) $\frac{c^2 - s^2}{t} l = \frac{c^2}{t} l + a^2 - 2a\sqrt{\frac{c^2}{t} l}$. Et (transponendo, atq; reducendo) $2ac\sqrt{\frac{l}{t}} = a^2 + \frac{s^2}{t} l$. Et (quadrando) $\frac{4a^2c^2l}{t} = \frac{a^4t^2 + s^4l^2 + 2a^2s^2lt}{t^2}$. Adeoque (dividendo per $\frac{4a^2l}{t}$) erit $c^2 = \frac{a^4t^2 + s^4l^2 + 2a^2s^2lt}{4a^2lt}$. Habetur ergo quantitas c^2, (cujus radix $c = CH$,) adeoq; punctum H, cui si Ordinatim-ponatur COM, erit $OM = a$, (quod, si opus sit synthetice demonstrari possit, repetitis Analyseos vestigiis,) adeóq; minor quam distantia assignata $2a$. Ideoq; distantia continuatæ rectæ CMM, ab Hyperbolâ continuatâ AO, tandem minor evadet distantia quavis assignata, Quod erat tertio demonstrandum. Adeoq; constat propositum.

Posset & hic ostendi, *Ad eandem Hyperbolam, nonnisi duas Asymptotas (utrinq; unam) duci posse; se mutuo in centro secantes.* Alia enim quæcunq; in eodem plano recta, vel Hyperbolam secabit, vel ad requisitam appropinquationem non accedet. Ut facile est demonstratu.

Item, *Asymptotas unius Hyperbolæ esse etiam Hyperbolæ oppositæ Asymptotas.* Quod simili fere progressu demonstrabitur ei quo usus sum ad Corollarium prop. 37.

Neq; illis tantum binis Hyperbolis Oppositis, sed & binis aliis hisce conjugatis (de quibus post dicetur) eædem conveniunt Asymptotæ, & quidem solæ.

Patet item, quod (*si ab eodem puncto H, ordinatim-applicatæ HO, HO, utrinq; continuentur ut Asymptotis occurrant in M,*) *erunt, OM, OM, (utrinq; sumptæ) æquales.* Cum enim tam HM, HM, ($\sqrt{\frac{c^2}{t} l}$) quam HO, HO, ($\sqrt{\frac{c^2}{t} l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t} l}$) erunt & OM, OM, (HM − HO) æquales.

Item; *Si (ad eandem quamvis Diametrum) Ordinatim ponantur rectæ quotlibet MOHM, (Asymptotis occurrentes in M Hyperbolæ in O, diametro in H,) omnia rectangula MOM (segmentis comprehensa) vel etiam rectangula OMO (sumptis O, O, in utroq; crure Hyperbolæ) erunt*

tam

tam inter se, quam quadratæ rectæ AM (ab Asymptotâ ad verticem ordinatim-positæ) æqualia. Nam ubicunq; in diametro (intra Hyperbolam) sumatur punctum applicationis H: rectangulum MOM vel OMO, (hoc est, HM − HO, in HM + HO; hoc est $\sqrt{\frac{c^2}{t}l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$, in $\sqrt{\frac{c^2}{t}l} + \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$;) semper erit $\frac{s^2}{t}l$ (ut multiplicando patebit;) hoc est AMq; est enim (ex hypothesi) $t.l$ :: CNq. NMq :: CAq $(= s^2)$. AMq $= \frac{s^2}{t}l$.

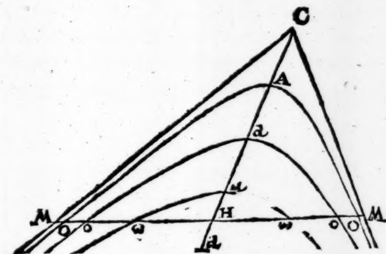
Asymptota verò, quæ jam dicitur, eadem est quæ ad prop. 36. supponitur *Tangens infinita*, a Centro ducenda, quæ non nisi post infinitam distantiam (hoc est, nunquam,) Hyperbolam continget.

Alia de Asymptotis & Theoremata & Problemata quæ ex jam dictis deduci possent prætereo.

PROP. XL.

De Hyperbolis Asymptotis.

HYperbolæ quotlibet ad eandem diametrum (versus easdem partes) ita accommodatæ, ut centrum idem habeant, atq; easdem (ad communem diametrum) Ordinatim-positas, vertices autem (in eâdem diametro) varios quoslibet, puta A, a, α, (adeoq; & varias diametros-interceptas;) Si eadē sit in omnibus ratio diametri-trāsversæ ad suum respective latus-rectum



ctum, (puta ratio t ad l in omnibus eadem) easdem habebunt Asymptotas-rectas, (puta CM, per praeced.) Eruntq; ipsę ad invicem *Hyperbolę Asymptotę*: Nempe ita ad invicem appropinquabunt ut earum distantia tandem evadat quâlibet assignatâ minor, (quoniam earum quælibet ita prope ad rectas Asymptotas accedit;) nec tamen invicem occurrent, (quoniam Ordinatim-applicatarum quadrata $h^2 = \frac{{}^2 \quad {}^2}{t} l$ minora erunt, cæteris paribus, ubi s major est; adeoq; HO major quam Ho, atq; hæc major quàm Hω.)

Si verò non sit (in variis ejusmodi Hyperbolis) ratio $\frac{l}{t}$ eadem: Nec easdem habebunt asymptotas rectas; neq; erunt ipsę Asymptotę; sed vel se mutuò secabunt, (nempe si Hyperbola quę majorem habet diametrum-transversam minorem habeat rationem t ad l;) vel (si majorem habeat rationem t ad l) debitam appropinquationem non attingent. Prout x premissis non est difficile demonstratu.

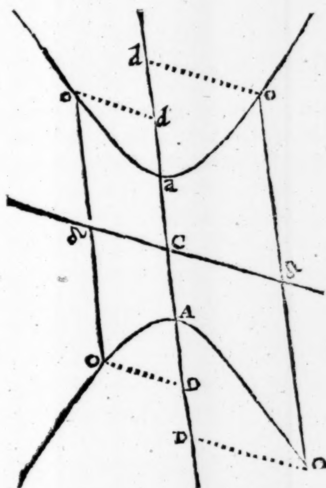
Illis autem, quas diximus, *Hyperbolis Asymptotis*, respondent Hyperbolæ totidem ejusdem Coni planis paralleli: secti: Quæ quidem quò propius ad verticem Coni accedunt, eò ad Triangulum accedunt propiùs; donec tandem (in ipso coni vertice,) evanescente diametro transversa, Hyperbola in Triangulum (vel si placet, Trianguli crura) degeneret; cujus quidem Trianguli crura repræsentant binæ Asymptotæ rectæ.

PROP. XLI.

De Hyperbolæ Diametris Conjugatis.

SI oppositarum Hyperbolarum diametro-transversę Aa Ordinatim-ponatur recta per centrum ♂C♂, dicetur illa *Diameter-conjugata*: quæ

quę quidem rectas omnes diametro Aa parallelas, oppositis sectionibus terminatas, puta Oo, bifariam secabit; quę propterea diametro $\delta\delta$ ordinatim-positę sunt, quas *Ordinatim-transcriptas* dicere licet.



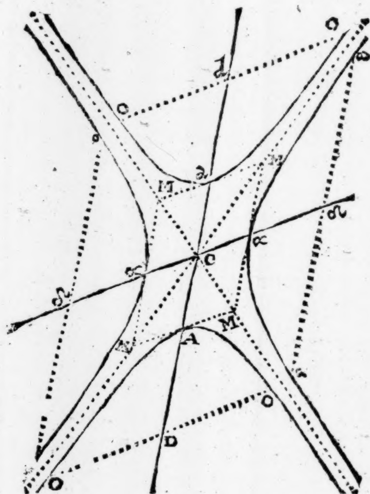
Nam si ordinatim-applicentur OD, od, diametro Aa (versus easdem partes;) erunt illæ (parallelæ parallelis terminatæ, ideóq;) æquales; & propterea CD, Cd, etiam æquales erunt (propter communem oppositarum Hyperbolarum diametrum-transversam, & æqualia latera-recta;) ideóq; & δO, δo, (propter parallelas) æquales erunt.

Sunt autem rectæ δO, hoc est CD, ea quantitas quam supra diximus $c = s + d = \frac{1}{2}t + d$.

PROP. XLII.

De Conjugatis Hyperbolis.

SI sit Hyperbolarum-Oppositarum transversa-diameter Aa $= t$, (& Latus rectum l;) atq; in diametro conjugata δ δ, sumantur a centro utrinq; æquales Cα, Cα; sitq; tota αCα $= \tau = \sqrt{tl}$ (ut nempe sit $t. l : : t^2. \tau^2.$) dicetur αCα *transversa-diameter conjugata*: Eâq; si describantur Oppositæ Hyperbolæ, vertices habentes α, α, & Ordinatim-applicatas δω diametro Aa parallelas, Latusq; rectum $\lambda = \frac{t^2}{\tau}$, (ut nempe sit $\tau. \lambda : : \tau^2. t^2$,) dicentur



oppositi vertices αα ipsis Aa *vertices conjugati*; atq; Hyper-

Hyperbolæ αα, ipsis A a, *Hyperbolæ conjugatæ*; commune cum illis centrum habentes, (ut patet.) Sed & easdem habebunt Asymptotas rectas: ut jam demonstraturus sum.

Nam completo parallelogrammo MM, (cujus latera per conjugatos vertices transeant, sintq; conjugatis diametris-transversis parallela, & propterea æqualia;) erunt rectæ CM omnium Asymptotæ; per prop. 39. (Idem accidet, si, sumptis quibusvis CD, Cδ, ipsis CA, Cα, proportionalibus, formetur parallelogrammum circa idem centrum C, latera habens conjugatis diametris parallela: Omnia enim puncta angularia, in Asymptotis CM reperientur. Puta, si ordinatim-applicatæ, in hac Figura descriptæ, ad Asymptotas usq; continuarentur.)

Præter illas autem Asymptotas duas, nulla in eodem plano recta duci potest, quæ (producta) non alicui ex conjugatis Hyperbolis (productis) occurret. Ut ex prædictis facile est demonstratu.

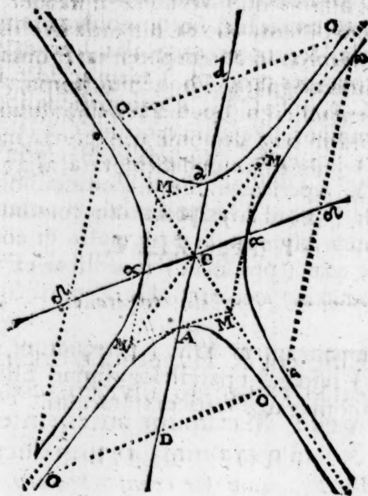
Parallelogrammum autem MM (per quatuor conjugatos vertices transiens) respondet parallelogrammo Ellipsi circumscripto per ipsius conjugatos vertices transeunti.

PROP. XLIII.

De Systemate Hyperbolico.

QUatuor illæ, quas diximus, Hyperbolę conjugatę, respondent totidem (in Ellipsi) conjugatis sectionibus Ellipticis (de quibus prop. 29. dictum est.) cum hoc tamen (inter alia) discrimine, quòd quatuor sectiones Ellipticę, centrum versus incurvatę se mutuò continuant; at conjugatę Hyperbolę, a centro recurvatę (partem convexam centrum versus habentes) neq; sibi invicem, neq; suis Asymptotis rectis, nisi post infinitam distantiam occurrunt, aut occursuras esse supponuntur. Tota verò figura

gura quæ contineri supponitur (aut supponi possit) quatuor convexis Hyperbolis, (sibi mutuo, ut & Asymptotis rectis, post infinitam distantiam concurrentibus,) toti figurę Ellipticę respondet.



Quatuor autem illas Hyperbolas conjugatas, infinitè continuatas, tandem concursuras; suppono quidem, non quod vel reapse concurrent, vel etiam actu poterunt infinitè continuari, (cum actu infinitum ejusmodi dari non possit:) sed quoniam qui alterum supponit supponere debet & reliquum. Multa autem apud Mathematicos supponi quæ actu non existunt, sat notum est; quæ veritatem habent *Consequentiæ* (ut loquuntur) sive Hypotheticam, licet non *Consequentis* sive Absolutam.

Atq; hinc est, quod Polygonum regulare infinitorum laterum pro circulo haberi soleat; aliaq; ejusmodi innumera: Et quidem universaliter, *Quantitates, quæ ita ad invicem continuo propius accedunt, ut earum (continuatarum) distantia quâlibet assignatâ minor*

minor evadat; supponendæ sunt (in infinitum continuatæ) tandem convenire.

Quod quidem eodem modo demonstrari potest quo 1a Archimedis *de circuli dimensione*, aliæq; passim apud Geometras demonstrari solent. Nempe, si in infinitum continuentur; vel concurrent (quod affirmatur,) vel adhuc distabunt; at hoc est impossibile: Si enim distent, esto ea distantia sive differentia *a* quantumvis exigua, probari autem potest eas propius accedere quam est ea distantia assignata, (hoc enim ponitur:) non igitur distant; conveniunt ergo. Quod erat demonstrandum.

Neq; potest quidem hæc demonstratio quovis modo eludi, magis quàm illa Archimedis modò memorata, aliæq; apud Mathematicos innumeræ.

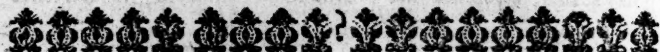
PROP. XLIV.

Ellipseos & Hyperbolæ comparatio.

PAtet ex Ellipseos & Hyperbolæ doctrinâ superiùs traditâ; earum ad invicem cognationem magnam esse. Maximum autem inter eas discrimen (unde & reliqua omnia ortum ducunt) hoc est, Quod, *in Ellipsi, diameter transversa atq; intercepta super se mutuo replicari supponitur; in Hyperbola vero, se mutuo continuare.* Adeóq; in Ellipsi $Da = Aa - AD = t - d$; in Hyperbola vero $Da = Aa + AD = t + d$. Atq; hinc quidem Ellipseos incurvatio versus centrum, & Hyperbolæ recurvatio a centro, aliáq; omnia quæ interveniunt discrimina: ut probè attendenti patebit. Adeoq; totum ferè Ellipseos doctrinam Hyperbolæ accommodavimus (consulto quidem, ut earum cognatio melius percipiatur) totidem fere verbis, mutatis tantum signis $+ -$.

Atq; hactenus Parabolæ, Ellipseos, & Hyperbolæ doctrinam, succinctè quidem, sed & dilucidè tradidimus.

APPENDIX.



APPENDIX.



Radidimus, in superioribus, trium illarum (prout vulgò dicuntur) Coni-sectionum, Parabolæ, Ellipseos, *atq;* Hyperbolæ, *doctrinam, succinctè satis, sed & interim satis (ni fallor) dilucidè. Earumq; vel omnes vel præcipuas saltem affectiones vel demonstravimus, vel saltem demonstrationum fontes indicavimus; ut inde liceat levi negotio ea omnia deducere, quæ longis ambagibus, atq; perplexo variorum Lemmatum & demonstrationum intricatarum labore antehac ostendi consueverunt.*

Atq; hæc omnia brevi admodum atq; succincta methodo tradita sunt; præsertim si omittantur ea omnia (quæ quidem tutò nec incommodè omitti posse videantur) quæ tota parte prima tradidimus; quæ quidem Conum spectant, atq; illarum ad conum relationem, cum quibus tamen præsens doctrina (quanquam secus olim creditum est) nullam habet necessariam connexionem; sed simpliciùs atq; universalius tradi & potest & debet.

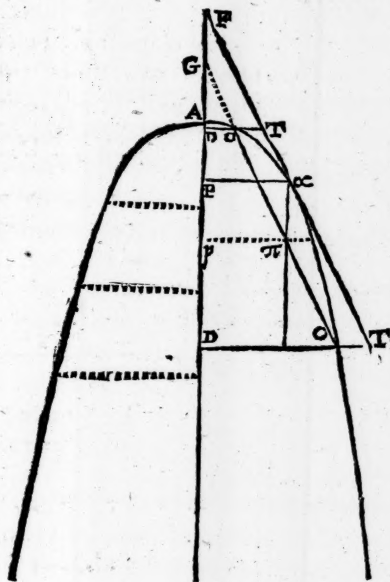
Sed interim viam simul apperuimus qua Curvarum doctrinam penitius intueri atq; ulterius promovere facilè possimus: (quod & nos fortasse deinceps aliquando, Deo favente, facturi sumus, si illud necesse videbitur, atq; viris doctis Mathematum peritis labores nostros gratos fore perspiciemus.) Interim specimen aliquod libet apponere, de curvis aliis Parabolæ affinibus, quarum Diametri, Ordinatim-applicatæ, Latera-recta, Tangentes, &c. non minus quàm in ipsâ Parabolâ reperiantur.

PROP.

PROP. XLV.

De Paraboloide Cubicali.

SI Paraboloides ita constituatur, ut Ordinatim-applicatas habeat in subtriplicatâ ratione Diametrorum interceptarum; (adeóq; illarum Cubos diametris-interceptis proportionales:) *Paraboloides Cubicale* dici poterit.



Latus-rectum Paraboloidis cubicalis (puta l,) appello rectam imaginariam, cujus quadratum in diametrum-interceptam ductum, æquatur cubo Ordinatim-applicatæ. Ut sit ubiq; $p^3 = l^2 d$.

PROP. XLVI.

De rectâ Paraboloides Cubicale contingente.

SI Paraboloides Cubicale A α, in puncto quovis α, contingat recta αF, diametro PA occurrens in F, sitq; eidem diametro ordinatim-applicata αP: erit recta AF (diametri continuatio) dupla diametri-interceptæ PA: hoc est, diameter continuata PF, tripla diametri PA.

Nam, sumpto ubivis (in eâdem diametro) puncto D, cui ordinatim-applicetur DO, tangenti αF occurrens in T: Punctum T (propter tangentem) vel erit idem cum puncto α, (si nempe P,D, coincidant:) vel (si secus) erit T extra curvam: & (propterea) DT $\geqslant$ DO (nempe æquales, si D, P, coincidant; vel, si secus, DT longior erit.)

Ponamus autem (ob commodiorem calculum) P$\alpha = p$, PA $= d$, PF$=f$, PD$=a$. Erit ergo (per def. præced.) PA. DA :: Pαc. DOc. hoc est $d.\, d \pm a :: p^3.\ \frac{d \pm a}{d} p^3 =$ DOc. Item (propter similia triangula) PF. Pα :: DF. DT. hoc est $f.\, p :: f \pm a.\ \frac{f \pm a}{f} p =$DT. Ejusq; cubus $\frac{f^3 \pm 3f^2a + 3fa^2 \pm a^3}{f^3} p^3$ (= DTc) $\geqslant$ (DOc =) $\frac{d \pm a}{d} p^3$. Et (utrinq; multiplicando per $f^3 d$, & dividendo per p^3) erit $f^3 d \pm 3f^2 da \pm$ $3fda^2 \pm da^3 \geqslant f^3 d \pm f^3 a$. Tum (auferendo utrinq; $f^3 d$, & dividendo per $\pm a$) erit $3f^2 d \pm 3fda + da^2 \geqslant f^3$. Deniq;, ponendo puncta PD coincidere, (ut evanescat quantitas a, adeóq; & ipsius multiplicia $\pm 3fda$, $+ da^2$,) erit $3f^2 d = f^3$, hoc est $3d = f$. Quod erat demonstrandum.

PROP.

PROP. XLVII.

De Paraboloidis Cubicalis Diametris.

IN Paraboloide Cubicali Diametri sunt invicem parallelæ: Et cujusvis diametri Ordinatim applicatæ, sunt rectæ in ipsius Vertice contingenti parallelę.

Demonstratio facile institui poterit ad imitationem illius quæ de Parabolâ adhibetur ad prop. 24. nisi quod PF, quæ istic dicitur 2*d*, hic dicenda est 3*d*. Eam nempe Analyticè sic examinabimus. Supponamus scilicet rem ita esse ut perhibetur: Adeóq; rectam Fα, quæ parabolam Aα in puncto α contingat, diametro PA productæ occurrere in F; eiq; parallelam OO parabolæ inscriptam, quæ (producta) eidem diametro supra verticem occurrat in G, (adeóq; si infra verticem diametro occurrat, tum tam duarum DG, quam duarum DO, de quibus mox dicetur, altera erit quantitas negativa, quod tamen calculum non turbabit;) ipsamq; OO rectâ απ (parallelâ diametro AP) bisectam in π (ut nempe rectæ πO, πO, sint ipsi απ ordinatim-applicatæ;) deniq; diametro AP ordinatim-applicari OD, OD, αP, ipsiq;

 parlelalam

parallelam $\pi\rho$ eidem diametro occurrere in p: quare & (propter parallelas) Pp$=\alpha\pi=$FG; & propterea PF $=$ pG: item (propter parallelas) rectam DD bisectam in p, sicut OO bisecatur in π. Quærendum autem est, numcubi reperiri possint puncta D, D; quæ quidem sicubi inveniantur, constabit propositum.

Substitutis igitur idoneis symbolis, esto P$\alpha=p$. PA$=d$. (ideóq; per præced: PF$=$pG$=3d$) Pp$=\alpha\pi=$FG$=g$. (ergo pA$=$PA + Pp$=d+g$.) pD $=q$. (ideoq; DA$=$pA $\pm$ pD$=d+g\pm q$. & DG$=$pG $\pm$ pD$=3d\pm q$.)

Erit igitur (propter Paraboloides cubicale per prop 45.) PA. DA : : Pαc. DOc. hoc est, $d.\ d+g\pm q :: p^3.\ \frac{d+g\pm q}{d}p^3$ $=$ DOc.

Item (propter similia triangula) PF. Pα : : DG. DO. hoc est, $3d.\ p :: 3d\pm q.\ \frac{3d\pm q}{3d}p=$ DO. Ejusque cubus

$$\frac{27d^3\pm 27d^2q+9dq^2\pm q^3}{27d^3}p^3=\text{DOc}=\frac{d+g\pm q}{d}p^3.$$

Ergo (utrinq; dividendo per p^3, & multiplicando per $27d^3$) erit $27d^3\pm 27d^2q+9dq^2\pm q^3=27d^3+27d^2g\pm 27d^2q$. Et (sublatis utrinq; æqualibus) $9dq^2\pm q^3=27d^2g$. Cujus quidem æquationis radix q, si vel ope Conisectionis vel alio quovis modo reperiri poterit, monstrabit quæsita puncta D, D, (alterum quidem supra punctum p, alterum infra;) adeóq; propositi veritatem.

Quo autem pacto ejusmodi æquationes cubicæ resolvi poterunt, non hujus loci est inquirere. Potest illud fieri vel methodo *Cartesiana*, vel juxta *Vietæ* exegesin numerosam, vel alia siquam alius quivis in posterum magis accommodatam invenerit, methodo. Sufficit instituto nostro ad eam æquationem rem perduxisse, quæ veram radicem negotio accommodam contineat.

Analysi peractâ, Demonstrationem syntheticam sic licet instituere.

In Paraboloide cubicali Aα, diametro AP, parallela ducatur $\alpha\pi$: per cujus punctum quodvis (intra paraboloides) π,

ducatur recta πG (diametro AP occurrens in G) parallela tangenti αF (quæ eidem diametro occurrit in F.) Dico $\alpha\pi$ ejusdem Paraboloideos diametrum esse, eiq; ordinatim positam πG.

Diametro AP ordinatim-applicetur αP, eiq; parallela ducatur πp (eidem diametro occurrens in p.) Et sunto symbola $P\alpha = p$. PA$=d$. FG$=\alpha\pi=$Pp$=g$.

Tum sumantur in diametro, utrinq; a puncto p, æquales rectæ pD$=$pD$=q$; utraq; nempe tanta, quanta est radix hujus æquationis $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$. Et punctis D, D, ordinatim ponantur rectæ DO, DO, rectæ π G occurrentes in O, O: quæ cum parallelæ sint rectæ πp, sicut recta DD (ex constructione) bisecatur in p, erit ideo OO (propter parallelas) bisecta in π.

Superest igitur ut ostendam rectam OO (bisectam in π) Paraboloidi inscriptam esse (ut nempe $\alpha\pi$ recta bisecans sit diameter) hoc est, puncta O, O, esse in Paraboloideos curva; nempe rectas DO, DO, (diametro A P. ordinatim-positas, ex constructione,) ordinatim-applicatis (ad eadem diametri puncta) æquales esse, adeoq; in curva terminari. Quod sic ostenditur.

Est pA $=$PA $+$ Pp$=d+g$. DA$=$pA $+$ pD$=d+g \pm q$. pG $=$PF$=3d$. DG$=$pG $\pm$ pD$=3d \pm q$.

Tum (propter Paraboloides cubicale) ut PA, ad DA; sic cubus rectæ Pα puncto P ordinatim-applicatæ, ad cubum ordinatim-applicatæ puncto D. hoc est $d.\ d+g \pm q :: p^3.\ \frac{d+g \pm q}{d}p^3$. qui igitur cubus est ordinatim-applicatæ puncto D.

Sed & tantundem est cubus rectæ DO. Nam (propter similia triangula) PF. Pα :: DG. DO. hoc est $3d.\ p :: 3d \pm q.$ $\frac{3d \pm q}{3d}p =$DO. Ejusq; cubus DOc$=\frac{27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3}{27d^3}$ p^3. Vel (pro $9dq^2 \pm q^3$, substituendo $27d^2g$, quæ per constructionem sunt æqualia,) $\frac{27d^3 \pm 27d^2q + 27d^2g}{27d^3}p^3$,

vel deniq; (abbreviando fractionem per $27d^2$) $\frac{d \pm q + g}{d}p^3$ $=$DOc. adeoq; rectæ DO, DO, ordinatim-applicatæ sunt punctis D, D, ad Paraboloideos curvam terminatæ in O, O;

& propterea rectam OO parabolæ inscriptam esse, ad diametrum $\alpha\pi$ ordinatim-positam. Quod erat demonstrandum.

PROP. XLVIII.

De Areâ Paraboloidis; & Conoidis Pyramidoidisve illi accommodati.

UT Archimedes (in lib. de *Quadratura Parabolæ*) ostendit Parabolam (figuram putà lineâ Parabolica & rectâ contentam) esse ad Triangulum (super eâdem vel æquali base æquè-altum) ut 4 ad 3: Sic & demonstrari potest, Pyramidoides cubicale ad Triangulum (intellige, super eâdem base æque-altum) esse ut 3 ad 2.

Item, ut Conoides Parabolicum ad Cylindrum (vel Pyramidoides Parabolicum ad Prisma) est ut 1 ad 2: Sic demonstrari potest, Conoides a Paraboloide Cubicali ortum ad Cylindrum (vel ejusmodi Pyramidoides ad Prisma) esse ut 3 ad 5.

Hæc autem alibi (Deo volente) inter ejusmodi alia multa aliquando sumus demonstraturi. Atq; insuper generalem methodum tradituri, quâ Paraboloidea quælibet ad Quadrata, & eorum Conoidea seu Pyramidoidea ad Cylindros aut Prismata reduci possint non minus quàm ipsa parabola aut Conoides Parabolicum rectum, (quod & de Conoidibus & Pyramidoidibus Ellipticis & Hyperbolicis, sive rectis sive scalenis, intelligendum esse volo:) Quæ nemo, quod sciam, antehac aggressus est.

PROP. XLIX.

De Paraboloidibus aliis.

SI Paraboloides Ordinatim-applicatas habeat in Diametrorum-interceptarum ratione subquadruplicatâ, vel subquintuplicatâ, &c; (in quibus

bus nempe Diametri-interceptæ ſunt Ordinatim-applicatarum biquadratis, vel ſurdeſolidis,&c, proportionales:) dici poterit *Paraboloides Biquadraticale*, vel *Surdeſolidale*,&c; (nomine nempe rationi aptato.)

Latus-rectum ejuſmodi Paraboloidibus conveniens, appello rectam imaginariam; cujus, in Biquadraticalibus, Cubus in diametrum-interceptam ductus æquatur Biquadrato Ordinatim-applicatæ; in ſurdeſolidalibus, Biquadratum in diametrum-interceptam ductum æquatur Surdeſolido Ordinatim-applicatæ: (& ſimiliter in aliis Paraboloidibus, reſpectu ſemper habito ad gradum Paraboloideos.) Ut ſit (prout gradus poſtulaverit) $p^4 = dl^3$, vel $p^5 = dl^4$, & ſic deinceps.

Habent autem & hæc Paraboloidea Diametros invicem parallelas; earúmq; Ordinatim-applicatas parallelas Tangenti in (ſuæ cujuſlibet) diametri vertice.

Recta verò AF (diametri continuatio inter verticem & tangentem intercepta) eſt, in Paraboloide Biquadraticali tripla, in ſurdeſolidali quadrupla, diametri interceptæ PA; (& ſimiliter in aliis:) Hoc eſt, continuata diameter PF (applicationis puncto & Tangentis concurſu intercepta,) eſt ad Diametri-interceptæ PA, in Biquadraticali quadrupla, in Surdeſolidali quintupla; & ſic deinceps.

Demonſtratio pari modo procedet atq; in Paraboloide Cubicali; aut etiam ipſa Parabolâ.

Adeo ut jam Paraboloidis Cubicalis, Biquadraticalis, ſurdeſolidalis, aut alîus cujuſvis, doctrina, non minus cognita habeatur, quàm ipſius Parabolæ.

Si tamen, poſt ſpecimen hoc exhibitum, operæ pretium cenſebitur rem hanc fuſiùs proſequi, poterit illud a quolibet faciliimè fieri cui tantum ſuppetit otii.

PROP.

PROP. L.

De Ellipto̗idibus & Hyperboloidibus.

DE Elliptoidibus & Hyperboloidibus (pariter atq; Paraboloidibus) in promptu erat nonnulla adjecisse; nisi quod eorum tractatio aliquantò intricatior esset, adeóq; fusius tradenda, quam brevi appendiculo conveniret.

Sufficiat igitur (specimine in Paraboloidibus exhibito) vel ansam aliis porrexisse, vel id ipsum forsan peculiari tractatu posthac præstiturum esse.

Interim, negotium a me primitus susceptum, me satis præstitisse non diffido.

LAUS DEO.



Johannis Wallisii, SS. Th. D.

GEOMETRIÆ PROFESSORIS *SAVILIANI* in Celeberrimâ Academia OXONIENSI,

ARITHMETICA INFINITORUM,

SIVE

Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora Matheseos Problemata.





OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. *Anno* 1656.



Clarissimo Spectatissimoq; Viro

Matheseos Peritissimo,

D. GULIELMO OUGHTREDO,

Ecclesiæ quæ est Aldeburiæ, in agro Surriensi, Rectori. S.



N *tibi tandem (Vir Clarissime) jam absolutum opus illud cujus spem fecit Propositio ea Cyclometrica, quam sub Paschatis festo Typis excusam tibi dicavi. Quod cum, pro more, ubi in publicum prodeat, alicui inscribendum sit, non tam Virum magnum quam magnum Mathematicum quærendum putavi, cui illud inscriberem. Adeoq; non alii cuiquam quam tibi magis illud deberi facile perspexi; qui & a Mathesi optime meritus es, & cujus scriptis me profecisse lubens agnosco: quippe qui in tua* Clave Mathematicæ, *opere licet non magno, ea breviter simul et perspicuè tradidisti, quæ magnis aliorum voluminibus frustra quæsitemus.*

Opus hoc invenies (siquid ego judico) plane novum. Cur enim ita non vocitem nihil video: nec alii credo id inficias ibunt. Quamvis enim non dubitandum sit, quin propositiones aliis cognitæ sparsim immisceantur, (quod necessario faciendum erat, partim ut inde ad alia lux affulgeat, neq; videar aliquid comminisci, quod Mathesi jam inventæ atq; excultæ nihil habeat affine; partim etiam ne hoc ipsum opus mutilum prodiret & mancum, cum illæ ex principiis nostris ita statim consequantur ut etiamsi

amſi alias ignotæ eſſent neceſſe ſit ut hinc ſtatim innoteſcant; & quidem ex earum illuſtrioribus pleraſq; non apud alios prius ſciverim exſtare quam ad eas methodo hæc pervenerim:) cum tamen & nova multa, aliis nec inventa nec cogitata quidem, habeat; atq; omnia novâ methodo a nobis primitùs in Geometriam introductâ, tradat; eaq; (niſi meis fortaſſe nimis faveam) perſpicuitate quâ in abſtruſioribus hiſce problematis nemo (quod ſciam) uſus eſt; Non eſt cur novum dubitem appellare.

Nempe inde ortum ſumit hæc noſtra methodus ubi Cavallerii methodus Indiviſibilium *deſinit. Unde etiam & operi ipſi, ipſiq; titulo, anſa data eſt; ut enim ille ſuam,* Geometriam Indiviſibilium, *ita* Ego *methodum noſtram,* Arithmeticam Infinitorum, *nominandam duxi.*

Quomodo autem ego huc pervenerim; licet id minus videatur dictu neceſſarium, cum omnia eâ fere methodo ſcripta ſint quâ inventa; tamen, quoniam id tibi non ingratum fore judico, iſtius etiam rei hiſtoriam breviter contexam.

Exeunte Anno 1650 *incidi in Torricellii ſcripta Mathematica, (quæ ut per alia negotia licuit, anno ſequente* 1651, *evolvi) ubi inter alia, Cavallerii* Geometriam Indiviſibilium *exponit. Cavallerium ipſum nec ad manum habui, & apud Bibliopolas aliquoties fruſtra quæſivi. Ipſius autem methodus, prout apud Torricellium traditur, mihi quidem eò gratior erat quòd neſcio quid ejuſmodi ex quo primùm fere Matheſem ſalutaverim animo obverſabatur; quod enim de circulo apud pleroſq; obtinet, (qui pro infinitorum laterum polygono haberi ſolet, adeoq; Peripheria pro rectis infinitis infinitè brevibus;) viſum erat mihi, mutatis mutandis, etiam alibi non inutiliter accommodari poſſe; & quidem eo*

ſpectare

spectare non pauca quæ apud Euclidem, Apollonium, & præsertim Archimedem passim exstant. Erant autem ea non nisi confusa adhuc apud me cogitata quæ nondum in ordinem redegeram. Neq; enim per alia licuit negotia, Mathesi animum ex professo applicare, sed ei saltem horis nonnunquam subcisivis indulgere; priusquam aliunde ad hanc quam jam subeo provinciam vocatus fuerim; quod non ita multo priùs contigerat.

Ubi hujusmodi jam obtinuisse methodum perſenſeram; cogitare apud me cepi, num non hinc aliquid de circuli quadratura, quam summos semper viros exercuisse notum est, luminis accedat. Quod spem facere videbatur, hoc erat. Infinitorum Coni circulorum, ad totidem Cylindri, ratio jam erat cognita, nempe ut 1 ad 3; eorum autem diametri omnes in triangulo per axem coni, ad totidem in parallelogrammo per axem cylindri, sunt (uti notum est) ut 1 ad 2. Pariter in Conoide parabolico circulos omnes ad totidem in cylindro circulos notum erat rationem habere 1 ad 2; eorum autem omnes diametros ad diametros horum esse ut 2 ad 3. Manifestum etiam erat rectas trianguli esse Arithmeticè proportionales, sive ut 1, 2, 3, &c. ergo circulos coni (in diametrorum ratione duplicata) ut 1, 4, 9, &c. Item circulos Conoidis parabolici (in duplicata ratione ordinatim-applicatarum, hoc est, in ratione diametrorum,) ut 1, 2, 3, &c. ergo eorũ diametros ut √1, √2, √3, &c. quippe in circulorum suorum ratione subduplicata. Fieri igitur posse sperabam, ut aliàs etiam ex cognita ratione quam habeat series circulorum, sive (quod eodem recidit) quadratorum, ad totidem æqualia; inveniri posset & quam habent rationem eorum vel diametri vel latera ad æqualia totidẽ Hoc autem si universali aliqua methodo invenire possẽ, de circuli quadratura satis prospectũ esset. Cum enim jam notum erat, parallelos omnes in sphæra circulos, ad totidem in

 Cylindro

Cylindro, esse ut 2 ad 3; si inde cognosci posset quam habeant omnes eorum diametri ad diametros horum, inventum foret quod quæritur: nempe Circulum illæ, hæ Quadratum diametri constituunt. Reducto ita problemate Geometrico ad purè Arithmeticum.

Huic igitur inquisitioni, istius anni 1651 *fine, & initio sequentis* 1652, *me applicui; ea plane methodo quam indicat hic Tractatus: opinatus vel inde constare aliquando posse quomodo quadrandus esset circulus, vel forte ne quidem quadrandum esse, vel saltem aliquid hinc emersurum esse quod operæ esset pretium.*

Aggressus igitur sum primo (ut a simplicioribus inchoem) series simplices, puta quantitatum Arithmeticè proportionalium, vel in earum ratione duplicata, triplicata, &c. deinde & subduplicata, subtriplicata, &c. atq; ex his composita, puta, subduplicatæ triplicata, &c. aut etiam qualitercunq; multiplicata, vel juxta denominationem rationalem aut etiam irrationalem. In quibus omnibus res plane quidem ex voto & supra spem successit. Unde Theorema tandem generale emersit, Prop. 64. *traditum. Sed & quadraturam simul reperi non modo Parabolæ nova methodo præstandam, sed & Paraboloidum omnium, eorumq; complementorum, quod nemo antea, quod sciam, aggressus erat, nedum assecutus. Adeoq; hinc statim Geometriam auctam persensi; cum enim antea ex figuris curvilineis sola fere parabola quadraturam nacta erat, jam paraboloidum omnium infinita genera unâ quidem & generali methodo unica propositio quadranda docent. Et quidem si unius Parabolæ quadratura Archimedem tantum nobilitaverit, (ubi omnes deinceps Mathematici ex eo tempore substiterunt tanquam ad Herculis columnas,) gratum illud orbi Mathematico futurum satis præsensi, si etiam ejusmodi figurarum infinita genera quadranda doceam. Sed & Conoidum item & Pyramidoidum*

dum

dum doctrinam hinc ampliatam vidi. Cum enim Archimedes ex Conoidibus & Sphæroidibus sola recta tractaverit (ut & post illum alii) de Pyramidoidibus ne quidem mentione facta; ego illa omnia sive Conoidea sive Pyramidoidea tam recta quam inclinata ad Cylindros & Prismata redegi. Nec ea tantum quæ ex Parabolis, sed & quæ ex Paraboloidibus omnibus eorumve complementis formantur, de quibus altum hucusq; apud omnes silentium, nec quicquam (quod sciam) uspiam tentatum. Sed & totam fere de Spiralibus doctrinam hinc etiam vidi directâ posse consequentiâ derivari: Et quidem non modo spatia spiralibus adjacentia (quod fecit Archimedes) cum circulo comparanda docui, sed & lineam ipsam spiralem cum peripheria, quod nemo antehac (quod sciam) aggressus est, nedum præstitit. Et propterea siquis spirali rectam æqualem dederit (~~quod aliqui se fecisse somniarunt~~) Peripheriam item utrivis æqualem datam iri non dubito; adeoq; & circuli quadraturam vel sic perfectam esse. Sed & ipsam spiralium doctrinam, non minus quam Parabolarum & Paraboloidum, ampliâsse proclive erat, nisi quod nollem ad Corollaria nimis exspatiari.

Transii deinde ad series auctas (quas voco) & diminutas sive mutilatas; quæ ex duarum pluriumve seriegum vel aggregatis vel differentiis constant. Atq; hic etiam successum minime contemnendum reperi. Nempe eas omnes ad series æqualium redigere non erat difficile; adeoq; Conoidea & Sphæroidea, vel etiam Pyramidoidea, non modo recta sed & inclinata, ad Cylindros & Prismata redigere rem nullius esse negotii perspexi: neq; ea tantum quæ ex Hyperbolis & Ellipsibus fiant, sed & quæ ex Hyperboloidibus vel Ellipsoidibus mille modis formari possent; verum eis sigillatim recensendis immorandum esse non duxi, ne nimis divagarem, præsertim cum illud qui fieri possit nemo non ex traditis suo marte perspiciat.

De

De seriebus autem istis sive auctis sive diminutis non ipsis solum, sed & quæ in earum ratione duplicata, triplicata, aut ulterius multiplicata procedunt, eandem inquisitionem eodem successu continuavi; uti ex iis quæ deinceps sequuntur propositionibus videndum est. Ubi simul numerorum figuratorum, puta triangularium, pyramidalium, &c. (quorum nullus vel exiguus hactenus usus fuerit, & fere ludicrus,) usus insignes ex insperato deteguntur.

Verum ubi de seriebus aliis quæ sint in istarum auctarum vel diminutarum ratione subduplicatâ, subtriplicata, &c. proximè agendum erat, (quod Circuli, Ellipseos, & Hyperbolæ quadraturam directè quidem & immediate spectabat, & quæ sola jam superfuit difficultas:) videbam illic aquam hærere, neq; ita facilè ac in prioribus me extricare posse. Re igitur variis modis tentata, nec eo tamen exitu qui votis omnino satisfaceret; eo deventum erat ut crederem rationem illam quæ quærebatur ejusmodi esse quæ nec veris numeris, nec quidem radicibus surdis esset explicabilis. Numerorum enim progressiones aliquot inveni inter quarum datos terminos alius erat interponendus, ut rationem quæsitam valeam exprimere. Eas autem progressiones tales esse ut nec Arithmeticæ dici possint (ubi augmenta continua sunt æqualia,) nec Geometricæ (ubi numeri continue multiplicantes sunt æquales,) sed tales quæ continuos multiplicatores habeant arithmetice proportionales, adeoq; magis adhuc sint compositæ quam Geometricæ. Si autem in Geometrica progressione, (ubi continui multiplicatores sunt æquales,) quamvis aliquando fieri poßit (verbi gratia, in 1, 4, 16, 64, &c.) ut interpolandi terminis illius medii sint numeris explicabiles, non item in omnibus (puta in 1, 2, 4, 8, &c.) id fieri possit, sed necesse sit ut numerum impossibilem ut-

indicemus, (puta $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, *&c:) multò minus ſperandum fore judicavi, ut in progreſsione magis adhuc compoſita (ubi continui multiplicatores ſint continuè vel creſcentes vel decreſcentes) id ſemper fieri poſſit; adeoq; alium aliquem notationis modum (quam qui adhuc receptus eſt) inducendum putavi quo numerus ille impoſſibilis indicetur.*

Atq; hactenus perveneram iſtius anni 1652 *initio, tempore (ſi memini) quadrageſimali; quo tempore nempe, per Academiæ noſtræ conſtitutiones, a publicis prælectionibus feriari permiſſum eſt, adeoq; privatis diſquiſitionibus magis vacare.*

Dum autem hic hærebam, placuit rem aliis quibus familiariter uſus ſum viris Mathematicis communicare, ut videam num illi auxilio eſſe poſſint in quæſita quantitate deſignanda. Adeoq; ex variis quas apud me conceperam ejuſmodi progreſſionibus, unam ſelegi, quæ omnium videbatur ſimpliciſſima, (ut quæ per numeros integros procedit;) eam nempe quæ jam habetur prop. 192. *hujuſce tractatus; eamq; ad hanc fere formam (non enim omnibus illam iiſdem plane verbis, ſed eodem tamen ſenſu propoſui) problematicè concepi;* Si æquabilem quandam curvam contingat in vertice recta unde ad curvam ducantur rectæ axi Parallelæ, æqualibus ab invicem diſtantiis remotæ, quarum prima ſit 1, ſecunda 6, tertia 30, quarta 140, quinta 630, &c; quanta erit illa quæ interponenda eſt media inter 1 & 6? *Vel etiam Arithmeticè,* In ſerie numerorum 1, 6, 30, 140, 630, &c. quæritur terminus medius ipſis 1 & 6 interponendus? *Fieri autem hos terminos indicabam, ex continua multiplicatione numerorum* $1 \times 4\frac{2}{1} \times 4\frac{2}{2} \times 4\frac{2}{3} \times 4\frac{2}{4}$ &c. *vel etiam* $1 \times \frac{6}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{14}{3} \times \frac{18}{4}$ &c. *quorum tam numeratores quam denominatores ſunt Arithmetice proportionales. Problema ſic conceptum propoſui, menſibus ſequentibus, (inter alios)*

Clarissimis viris & Mathematicis, D. Setho Wardo *Astronomiæ Professori Saviliano, Collegæ meo meritissimo;* Laurentio Rook, *tunc apud Oxonienses commoranti, nunc apud Londinenses in Collegio Greshamensi Professori Astronomico;* & Richardo Rawlinson *Collegii Reginalis apud Oxonienses Socio; nescio annon etiam sub eodem tempore, (an aliquanto serius)* Roberto Wood *Socio Collegii Lincolniensis,* & Christophoro Wren *Collegii Omnium-Animarum nunc Socio; (sed & aliis etiam aliquot, quibus nominandis supersedeo:) & quidem detecto iis (ni fallor) omnibus eo ad quem tendebat scopo; nempe, datâ illâ quæ quærebatur quantitate absolutam fore quadraturam Circuli. Non autem vel ego mihi vel etiam eorum quispiam (quibus nec erat obvium responsum, nec vacabat suis postpositis de quæsitis meis admodum esse solicitis,) ex voto satisfecit. Monuit autem eorum aliquis ut* Gregorii a Sancto Vincentio *Opus Geometricum consulerem (cujus ne nomen quidem anteà audiveram) ut qui magno volumine hujusmodi res quæ ad circuli Quadraturam spectent exposuerit. Huic ego monito obtemperabam; librumq; utut tanto erat volumine ut non integrum perlegere vacaverit, pervolvi utcunq; ; solicitus an inde quæ ad rem nostram facerent reperire possim. Inveni autem aliquando easdem & illi & mihi (quod nihil mirum erat) speculationes obtigisse, licèt diversis methodis eo pervenerimus. Exsempli gratia, Prop.* 15. *nostra apud illum (si memini) alicubi occurrit: at tamen scrupulum illum quem ibidem in Scholio indicavimus, ille vel dissimulat, vel (quod potius putaverim) non animadvertit, nec memini an sensu nostro illam intelligat necne. Item, quod appellat ille* plani in planum ductum, *id ipsũ est quod nos et hic, et in Tractatu de Conicis Sectionibus (qui huic gemellus est eodem anno* 1652 *conceptus &*

primitùs formatus) dicitur, ductus rectarum omnium unius plani in alterius respectivas rectas; *cur autem ego* ductum plani in planum *non dixerim, in causâ erat, quod revera non tam planum in planum (sic enim prodiret plano-planum, quatuor nempe dimensionum, non solidum,) sed latitudo unius in latitudinem alterius, & factum deniq; in communem altitudinem ducitur; adeoq; tres (non quatuor) emergunt dimensiones. Et alia fortasse nonnulla. Ut autem ex suis ne unam vel propositionem vel demonstrationem in nostrum tractatum assumpsi, quam ego antea non inveneram; ita si quæ forsan occurrant utriq; communes, non opus esse credidi, ut propterea ex nostris delerem, cum & illud sæpissimè contingere sit necesse, ut ubi duo vel plures rem eandem tractandam suscipiant in easdem aliquando incedant speculationes. Verum (utut ille multa habeat acutè inventa, methodo a nostra plane aliena) illud quod apud eum maximè quærebam nusquam inveni; neq; enim ille vel eousq; rem perduxerat, nec etiam circuli quadraturam, quam se invenisse prohibet, omnino attingit, sed ad propositionem nostræ prop.* 136. *non multum absimilem ubi pervenerat, ratus inde se circuli quadraturam invenisse, non tamen assecutus est; uti in* Ἐξετάσει *sua ostendit* D. Hugenius.

Sub ejusdem anni (1652) *autumno, Clarissimo Viro* Francisco Schotenio *Matheseos Professori apud Lugduni-Batavos, inter alia, proposui etiam hoc problema, (tecto tamen quo collimabat scopo;) qui, re statim cum Clarissimo Viro* Christiano Hugenio *communicata, rescriptis non ita multò post literis intricatam rei difficultatem (utut primo aspectu facilior visa fuerit) subindicavit, nequè interim spem fecit vel sibi vel Dom.* Hugenio *vacaturum fore ut ei ulterius exquirendæ plus operæ impen-*

dant. His eorum omnium responsis, confirmatior factus sum in ea quam pridem conceperam opinione, nempe terminum illum quæsitum neq; numerum rationalem esse, neq; ex adhuc receptis surdis aliquem; sed nova notatione designandum; & quidem, si libet, eâ quam nos ad prop. 190. assignavimus. Si vero (prout verbi gratia √2, *licet veris numeris exprimi præcisè non possit, possit tamen quam proximè, ita) velimus hanc quantitatem veris numeris quam proximè exprimere, (tanta nempe* ἀκριβείᾳ *quanta quis velit, modò præcisam non velit,) quomodo illud fiat docemus prop. 191. Quomodo illud Geometricè utcunq; exhibeatur, ostensum est item propositionibus sequentibus. Adeoq; circuli quadraturam eousq; prosequuti videmur quantum numerorum natura patitur. Qui vero ulterius rem præstare postulat, perinde est acsi postulet* √2 *veris numeris exprimere: quod iniquum esset postulatum. Non interim ignoro quin poßit & aliis etiam modis inexplicabilis illa quantitas characteribus designari, atq; ad numeros veris proximos aliis item methodis perveniri, (sicut & de radicibus surdis dici possit,) qua in re non est ut ego viris Mathematicis quicquam præscribam, sed quibus quisq; malit uti liberum relinquam.*

Absoluta autem circuli quadratura, non opus esse duxi cognata illi alia problemata sigillatim attingere; puta quam habeat rationem diameter ad peripheriam; aut sphæra ad cubum; aut conus vel cylindrus ad pyramidem aut prisma; aliaq; similia: nemo enim nescit hæc inde colligere.

Sed neq; de quadratura Ellipseos seorsim quicquam dicendum videbatur; quippe quæ junctim cum quadratura circuli traditur.

Hyperbolæ quadraturam quousq; fuerim assecutus, prop. 165. ostendimus.

Interim

Interim tamen, methodi quam trado filum secutus, inopinato incidi in quæstionem satis mirabilem de mensurandis figuris altera parte terminatis altera in infinitum continuatis. Adeoq; quod in una figura solida præstitit Torricellius, id nos in aliis infinitis tam planis quam solidis faciendum ostendimus, prop. 87. & seq. ad 107. Et simul docemus quo dignoscatur criterio num ejusmodi figuræ propositæ in infinitum continuatæ finitam tandem an infinitam magnitudinem sint assecuturæ. Quæ quidem & miranda satis, & jucunda simul, videatur speculatio.

Quod autem jam ante tres annos invenerim, cur non citius in publicum dederim; in causa fuit partim quod ego aliis non raro negotiis fuerim avocatus, sed præsertim quod Typographus, aliis edendis occupatior, non nisi serius susceperit & tardius exsecutus sit & hujus & aliorum qui cum hoc prodeunt tractatuum impressionem. Quam verò, dum quæ jam prodeunt sub Prelo erant, placuit (sub æquinoctio verno) quasi in antecessum emittere, propositionem Cyclometricam, (quæ & eam continet, quam ante aliquot annos sub problematis forma, ut supra dictum est, egregiis aliquot viris proposueram,) invenies ex tribus illis quæ hunc tractatum claudunt desumptam esse. Ex eo autem tempore, (mense jam proximè præterito) prodiit Libellus D. Hobbes; qui jam magna pollicitus in Geometria, & speciatim circuli quadraturam anguliq; in datâ ratione sectionem, aliaq; his cognata, Libellum tandem suum in publicum emisit; quo se ostendit nec horum quicquam præstitisse, nec quidem præstiturum esse; adeo enim turpissimis paralogismis ubiq; scatet Libellus iste, ut rarò aliquando quid sanum invenias, (quod nostro istius Elencho, qui & jam sub Prelo est, manifestum fiet;) unde & Authorem non eum esse

facile

facile dignoſcas a quo hujuſmodi myſteria ſperemus retexenda.

Cæterum vale, Venerande Senex: Et te Deus ſumme miſericors feliciter ſoſpitet, tuaq; omnia faxit proſpera: ut tandem, poſt Senium Feliciter & Piè tranſactum, ærumnoſam quam vivimus vitam vitâ commutes meliori. Quod animitus precatur

Tui Obſervantiſſimus

Dabam Oxoniæ
Julii 19. 1655.

JO: WALLIS.



Propoſitio quam memorat Epiſtola præcedens hæc eſt quæ ſequitur.



SPECTATISSIMO VIRO

D. GULIELMO OUGHTREDO,

Matheseos cognitione Celeberrimo,

JOHANNES WALLISIUS

Geom. Prof. OXON. S.

QUam tibi antehac (Celeberrime Vir) Propositionem, velatâ facie, & formâ Problematicâ; ut & aliis, quibuscum rem habui, Mathematicis non paucis ante aliquot annos, exhibueram; celato plerumq; (nonnullis tamen detecto) in quem dirigebatur scopo: En tandem apertâ fronte, formâ Theorematicâ, eloquentem (quam prius subticebat)

Circuli Quadraturam.

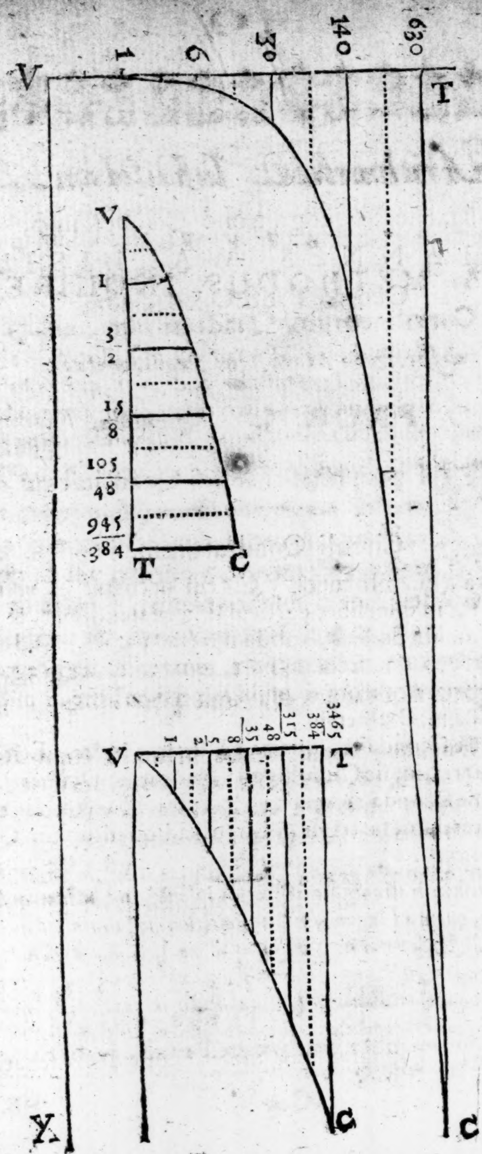
EXpositâ æquabili curvâ VC, cui occurrat in vertice recta VT, in quotlibet particulas æquales divisa, &, à singulis divisionum punctis, totidem rectis parallelis ad curvam usq; ductis, quarum secunda sit 1, quarta 6, sexta 30, octava 140, &c. Erit, ut earum secunda ad tertiam; sic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si sit secunda 1, quarta $1\frac{1}{2}$ sexta $1\frac{7}{8}$, &c. Erit, ut secunda ad tertiam, sic Circulus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si sit secunda 1. quarta $\frac{1}{2}$, sexta $\frac{3}{8}$, &c. Erit, ut secunda ad tertiam, sic triplum Circuli ad quadruplum Quadrati ex Diametro.

Totum Demonstrationis progressum, ipsamq; methodum quâ tam ad hanc circuli, quam ad innumeras alias aliorum curvilineorum quadraturas pervenerim, ostendet tractatus quem apud me jam aliquandiu perfectum habeo, & quidem in Typographorum usum exscriptum, quem in publicum daturus sum, quam primum per Typographorum moras licebit, quorum otia per duos integros & quod excurrit annos jamjam expectavi.

Dabam è Typographéo *Oxoniensi* postridie Paschatis,


V
T
C
Y
1
6
30
140
630
1
3/2
15/8
105/48
945/384
5/2
35/8
315/48
3465/384



Arithmetica Infinitorum.

SIVE

NOVA METHODUS INQUIRENDI in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; *difficiliora Matheseos Problemata.*

PROP. I. *Lemma.*

SI proponatur series Quantitatum *Arithmetice-proportionalium* (sive juxta naturalē numerorum consecutionem) continuē crescentium, a puncto vel 0 (ciphra, seu nihilo) inchoatarum, (puta ut 0, 1, 2, 3, 4. &c.) propositum sit inquirere, quam habeat rationem earum omnium aggregatum, ad aggregatum totidem maximæ æqualium.

Simplicissimus investigandi modus, in hoc & sequentibus aliquot Problematis, est, rem ipsam aliquousq; præstare, & rationes prodeuntes observare atq; invicem comparare; ut inductione tandem universalis propositio innotescat.

Est igitur, exempli gratia, $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6} = \frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12} = \frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20} = \frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30} = \frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42} = \frac{1}{2}$.

Et pari modo, quantumlibet progrediamur, prodibit semper ratio subdupla. Adeóq; ----

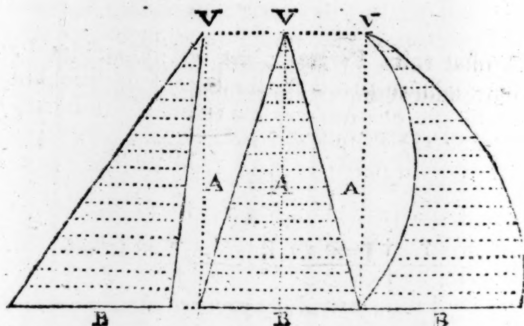
PROP. II. *Theorema.*

SI ſumatur ſeries quantitatum Arithmeticè proportionalium (ſive juxta naturalem numerorum conſecutionem) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum, & numero quidem vel finitarum vel infinitarum (nulla enim diſcriminis cauſa erit,) erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 2.

Nempe, ſi primus terminus ſit o, ſecundus 1, (nam ſi ſecus, moderatio adhibenda erit,) & ultimus l erit ſumma $\frac{l+1}{2}l$. (erit enim, eo caſu, numerus terminorum $l+1$.) vel, (poſito numero terminorum a, quantuſcunq; ſit terminus ſecundus) $\frac{1}{2}al$.

PROP. III. *Corollarium.*

ERgo, *Triangulum ad Parallelogrammum* (*ſuper æquali baſe, æquè altum,*) *eſt ut* 1 *ad* 2.

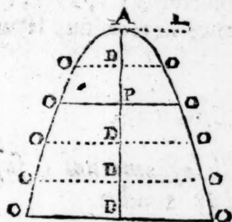


Triangulum

Triangulum enim constat quasi ex infinitis rectis parallelis Arithmeticè proportionalibus, a puncto inchoatis, quarum maxima est basis, (ut ostendimus ad pr. 1, & 2. libri nostri de Conicis Sectionibus;) Parallelogrammum autem ex totidem basi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc est ut 1 ad 2 (per præced.) Quod erat demonstrandum.

PROP. IV. *Corollarium.*

ITem, *Pyramidoides vel Conoides Parabolicum (sive erectum sit sive inclinatum,) ad Prisma vel Cylindrum (super æquali base, æque-altum,) est ad* 1 *ad* 2.





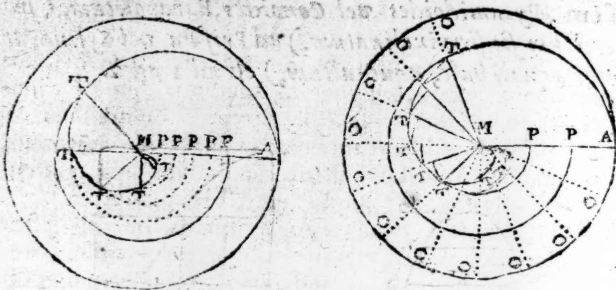
Constat enim Pyramidoides vel Conoides Parabolicum quasi ex infinitis planis Arithmetice proportionalibus, a puncto inchoatis, quarum maxima est basis, (ut ostendimus prop. 9. Con. Sect.) Prisma verò vel Cylindrus ex totidem basi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc ut 1 ad 2, per prop. 2.

PROP. V. *Corollarium.*

ITem, *Linea Spiralis qualibet MT (a Spiralis Principio exorsa) ad correspondentem Peripheria arcum*

conterminum PT (a Principio circulationis exorsum,) est ut 1 *ad* 2.

Esto enim Linea Spiralis (una circulatione facta) M T A, Principium Spiralis M, (quod idem esto & centrum Arcûs peripheriæ, quem correspondentem voco,) Principium circulationis recta M A, quæ æquabili motu circumducta (manente puncto M) supponitur puncto suo A peripheriam describere AOA (qui *Circulus primus* vel potius *Circuli primi Peripheria*, di-



Spiralis in utraq; figura continuanda erat integra ad medium usq; sed per Cælatoris incuriam, in altera manca est, in altera intercisa.

ci vel solet, vel commode potest,) dum interim punctum aliquod (in eadem recta circumducta) moveri supponitur (æquabili item motu) ab M ad A, motu suo lineam Spiralem MTA describens: Adeóq; recta quælibet MT (a principio spiralis M, ad spiralem ubivis ducta) erit ad rectam MA, ut peripheriæ arcus AO (eodem tempore descriptus) ad peripheriam totam AOA, vel ut angulus AMT ad quatuor rectos: Adeoq; & rectæ MT, MT, arcubus AO, AO, proportionales erunt, ut patet.

Tum, ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos AMT, TMT, &c. æquales invicem facientibus (adeoq; arithmeticè proportionalibus) supponamus (super illis angulis) similes Sectores totidem (saltem uno minus, quia in spacio primo sector inscribi non poterit), figuræ MTM (spirali MT & rectâ TM comprehensæ) inscribi. Sectores illi omnes con-

stituunt

stituent figuram (ex similibus sectoribus compositam) ipsa figura MTM (cui inscribitur) minorem: Differentia verò perpetuo minuetur prout sectores illi (eidem MTM figuræ inscripti) plures fuerint, (ut patet,) adeò ut, si sectores illi supponantur infiniti, figura sic inscripta ipsi MTM figuræ congruet, (per ea quæ universaliter monuimus ad prop. 3. Con. Sect.) & propterea sectorum illorum omnium arcus ipsi spirali MT congruent.

Sunt autem illi similium sectorum arcus (sicut eorum radii) arithmeticè proportionales, nempe ut 0, 1, 2, &c. angulus autem cujuslibet sectoris est ea pars anguli totius AMT quæ sectorum sive spaciorum numero cognominis est; adeoq; si sectores supponantur infiniti, erit angulus cujuslibet $\frac{1}{\infty}$ (pars infinitè parva) anguli totius AMT, ita nempe ut omnes simul æquentur toti AMT. (Liceat autem mihi, καταχρηστικῶς forsan, Anguli nomine appellare angulorum etiam aggregatum, quamvis fortasse duos rectos vel æquet vel etiam superet.)

Spiralis igitur MT constare supponitur ex infinitis sectorum arcubus arithmeticè proportionalibus, (subtensis $\frac{1}{\infty}$ anguli AMT,) quorum minimi radius est 0, seu punctum, (nullius magnitudinis,) maximi vero recta MT.

Correspondens autem arcus conterminus PT, ex totidem constat sectorum arcubus maximo æqualibus, ut patet.

Ergo aggregatum illorum (hoc est linea spiralis MT) ad aggregatum horum (hoc est arcum conterminum PT) est ut 1 ad 2. per prop. 2.

PROP. VI. *Corollarium.*

ET propterea, *Linea Spiralis MA unâ circulatione facta æquatur semissi peripheriæ circuli primi, AA.*

Nam arcus conterminus spirali MA, est integra peripheria circuli primi puncto A descripta. Ideoq; &c. pro prop. 5. quod erat demonstrandum.

PROP. VII. *Coroll.*

ET *Spiralis descripta circulationibus duabus, tribus, quatuor, &c. integris; æquatur semissi peripheriæ circuli secundi, tertii, quarti, &c. bis, ter, quater, &c. sumptæ.*

In figura sequente.

Nam dum describitur Spiralis MAB (duabus circulationibus facta) Punctum illud B, peripheriam BB bis describit: & dum describitur spiralis MABC, peripheria CC ter describitur; & peripheria DD quater, dum describitur spiralis MABCD Et sic deinceps, pro numero circulationum multiplicanda est peripheria contermini circuli, & multipli semissis æquatur spirali interea descriptæ.

PROP. VIII. *Coroll.*

SI vero *Spiralis ultra circulationem primam, sed non duabus integris continuetur, æquabitur semissi tam peripheriæ integri circuli contermini, quam ejusdem continuationis supra circulum integrum.*

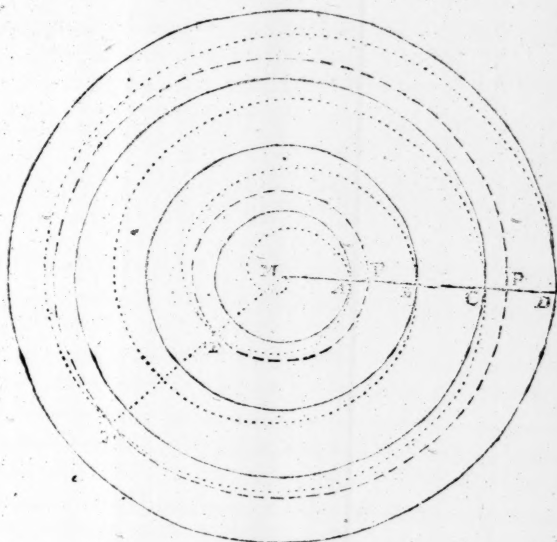
Nam interea dum describitur (motu composito) Spiralis MAT, describetur etiam (a puncto P) arcus PPT, nempe tota peripheria PP cum adjuncto additamento PT. Ergo &c. pro prop. 5 Quod erat demonstrandum.

PROP. IX. *Coroll.*

ET pariter, *Si spiralis continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; æquabitur illa semissi conterminæ peripheriæ integræ, bis, ter, quater, aut sæpius acceptæ (pro numero nempe integrarum circulationum) cum semisse item additamenti.*

Quia

Quia nempe dum ſpiralis illa deſcribitur, toties deſcribitur peripheria contermina integra, atq; inſuper additamentum: Hoc eſt, correſpondens arcus conterminus continet totidem in-



tegros circuli ambitus (quot ſunt integræ circulationes) cum additamento. Ideoq; conſtat propoſitum, per prop. 5.

PROP. X. *Corollarium.*

Atq; inſuper, *Lineæ Spirales unâ, duabus, tribus, quatuor, &c. circulationibus factæ, (puta MA, MAB, MABC, MABCD, curvæ) ſe habent ad invicem ut numerorum Arithmetice-proportionalium quadrata; nempe ut* 1, 4, 9, 16, *&c. Sive ſunt in duplicata ratione rectarum* M*A, MB, MC, MD, &c.*

Sunt

Sunt enim rectæ MA, AB, BC, CD, invicem æquales (propter æquabilem progressum puncti mobilis in recta MA, etiam continuata, tantum in una circulatione æquabiliter progredientis quantum in altera;) adeoq; tam radii MA, MB, MC, MD, quam Peripheriæ (illis radiis descriptæ) A, B, C, D, sunt ad invicem ut 1, 2, 3, 4. Si igitur sumantur peripheriæ, prima semel, secunda bis, tertia ter, quarta quater, erunt illa multipla, (puta 1 A, 2 B, 3 C, 4 D,) ut numeri quadrati 1, 4, 9, 16, sive 1×1, 2×2, 3×3, 4×4. Et propterea etiam horum multiplorum semisses, hoc est (per prop. 5.) spirales MA, MAB, MABC, MABCD.

Vel aliter, si circuli primi peripheria ponatur $A = p$, erit secundi $B = 2p$, tertii $C = 3p$, quarti $D = 4p$, & sic deinceps; & $1A = 1p$, $2B = 2\times2p = 4p$, $3C = 3\times3p = 9p$, $4D = 4\times4p = 16p$; &c. Et (per prop. 5) Curvæ spirales $MA = \frac{1}{2}p$; $MAB = \frac{2}{2}B = \frac{4}{2}p$, $MABC = \frac{3}{2}C = \frac{9}{2}p$, $MABCD = \frac{4}{2}D = \frac{16}{2}p$, &c. ideoq; ad invicem ut 1, 4, 9, 16, &c. hoc est in duplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c. (quæ sunt ad invicem ut 1, 2, 3, 4, &c.) Quod erat demonstrandum.

PROP. XI. *Corell:*

ET universaliter; *Ejusdem (vel similium) spiralis segmenta quælibet (a principio spiralis exorsa) sunt ad invicem in duplicata ratione rectarum conterminorum.*

Cum enim (per constructionem lineæ spiralis) eadem sit ratio rectarum MT, MT, quæ est angulorum PMT, PMT, (anguli voce eo sensu sumpta qui supra innuitur prop. 5.) ratio arcuum PT, PT, (quæ ex duabus illis rationibus componitur,) ut & curvarum MT, MT, (quæ illorum arcuum sunt semisses) erit duplicata rationis rectarum MT, MT, seu ut MTq, MTq.

Sic v.g. si recta MA (unius circulationis) dicatur $1r$, & peripheria circuli primi (eo radio descripta) $1p$, erit spiralis $MA = \frac{1}{2}p$. Igitur, in una circulatione cum semisse, fiet recta contermina $1\frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r$, & peripheria contermini circuli $\frac{3}{2}p$; quæ

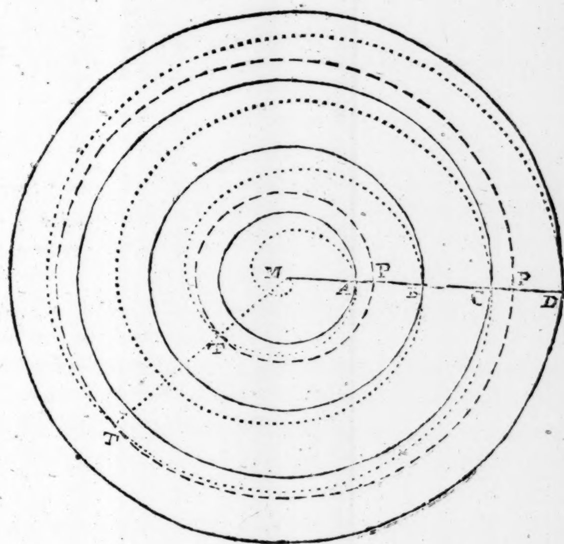
ducta

ducta in $\frac{3}{2}$ (numerum circulationum) fit $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times p = \frac{9}{4}p$: Ejusq; semissis $\frac{9}{2 \times 4}p = \frac{9}{8}p$ est linea spiralis eodem tempore descripta.

Similes *autem appello lineas Spirales, si rectæ MA, MB, MC, &c. in unâ, æquales sint homologis rectis in altera.*

PROP. XII. *Corollarium.*

SI vero *ejusmodi spiralium dissimilium (puta si MB in unâ, tanta sit quanta MC in alia) rectæ contermina sint æquales; erunt spiralium illarum segmenta homologis suis rectis (puta MA in una, & MA in altera) reciprocè proportionales.*



Nam v.g. in primâ, erit spiralis MAB (duabus circulationibus

nibus descripta) æqualis semissi peripheriæ suæ B, bis sumptæ; & in secunda, Spiralis MABC (tribus circulationibus descripta) æqualis semissi suæ peripheriæ C ter sumptæ: Cúmq; supponantur æquales peripheriæ B in primâ, & C in secunda, (propter æquales radios;) erunt spirales MAB prima, & MABC secunda, ad invicem 2 ad 3, (nempe ut peripheria bis sumpta, ad eandem vel æqualem ter sumptam;) hoc est, in reciprocâ ratione rectarum homologarum MA, MA: Nam recta MA in primâ est $\frac{1}{2}$ rectæ MB, & recta MA in secundâ est $\frac{1}{3}$ (ejusdem vel æqualis rectæ) MC: sunt igitur MA in secunda ad MA in primâ, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut $\frac{2}{6}$ ad $\frac{3}{6}$, vel ut 2 ad 3. Ideoq; Spiralis prioris segmentum MAB, ad spiralis posterioris segmentum MABC, ut recta MA in secunda ad rectam MA in primâ.

Atq; idem similiter ostendetur, quæcunq; sit ratio homologarum rectarum in dissimilibus spiralibus.

PROP. XIII. *Corollarium.*

S*I autem ejusmodi spiralium dissimilium rectæ conterminæ sint etiam inæquales; erunt illæ spiralium segmenta adinvicem in eâ ratione quæ componitur ex duplicata ratione rectarum conterminarum, & reciprocâ ratione rectarum homologarum.*

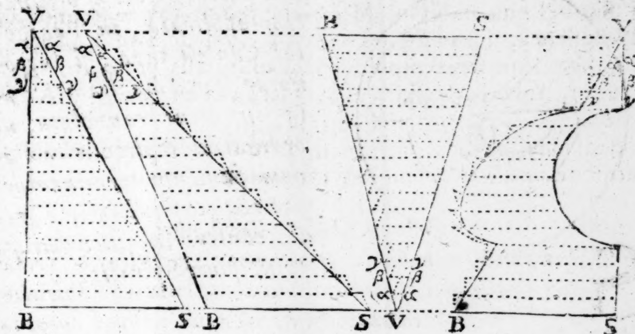
Sequitur ex prop. 11. 12.

SCHOLIUM.

Notandum autem est, in propositionibus præcedentibus, quæ de linea Spirali agunt (quod & in secuturis aliquot facturus sum) me *lineæ Spiralis* appellationem (ne longa circumlocutione toties opus sit) abusive usum fuisse. Nempe, per *lineam Spiralem*, (quoties ea ad Peripheriam comparatur,) intellectum vellem *Aggregatum omnium arcuum Sectorum similium, numero infinitorum, ex quibus constat figura illa ex infinitis numero Sectoribus Spirali inscripta*; (qua scilicet & nos ad Prop. 5. &c. hujus, & Archimedes ad Prop. 21 &c. lin. spir. usi sumus:) ut ad prop. 5. innuimus. Quod quidem Aggregatum ipsa linea Spirali proprio sensu sumpta, perpetuò minus est, & maxime quidem circa spi-

ralis

ralis initium. Quamvis enim Sectorum illorum numero infinitorum aggregatum, ipsi figuræ lineis recta & Spirali terminatæ, (juxta methodum Indivisibilium) æquale ponatur; non tamen illud de omnium Arcubus cum ipsa Spirali (propriè dicta) comparatis obtinebit. Tantundem enim esset, ac si quis, dum infinita numero parallelogramma triangulo inscripta (aut etiam circumscripta) toti triangulo VBS æqualia videat, inde



concluderet eorum omnium latera rectæ VS adjacentia (rectæ VB parallela) ipsi VS simul æqualia esse, vel quæ rectæ VB adjacent (ipsi VS parallela) æqualia simul esse toti VB. (Quod siquando verum esse contingat, puta in triangulo isosceli, non tamen id universaliter concludendum erit.) Atq; hoc quidem eo potius admonendum duxi, quod viderim etiam viros doctos nonnunquam speciosa ejusmodi verisimilitudine in lapsum proclives esse. Cur autem omissa Spirali genuina, spuriam hanc peripheriæ comparaverim; causa est, quod huic possim, non autem illi, æqualem peripheriam assignare.

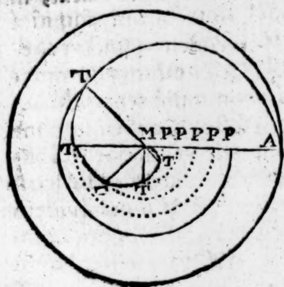
PROP. XIV. *Corollarium.*

ET propterea etiam *segmenta spiralis, a principio spiralis exorsa, sunt ad rectas conterminas, sicut Parabolæ Diametri interceptæ, ad ordinatim-applicatas.*

Nempe in ratione duplicatâ, per prop. 11.

PROP. XV. *Coroll.*

Ideo *si supponatur* Spiralis *nostra MTT ita evolvi, ut rectam constituat, & rectæ omnes TM, TM, fiant invicem parallelæ; erit illa, Diameter, hæ verò, ordinatim-applicatæ in Parabola: Contra vero, si supponatur Parabolæ diameter ita in arcus convoluta, ut ordinatim-applicatæ ad idem punctum terminentur; fiet illa, Spiralis; istæ, rectæ contermina; hoc deniq;, principium* Spiralis.



SCHOLIUM.

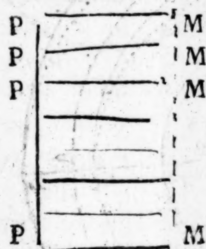
Atq; hinc etiam ulterius patet illud quod post prop. 13. indicavimus. Nempe, Spiralem illam nostram ex infinitis similium Sectorum arcubus conflatam, non esse genuinam Spiralem propriè dictam, sed ipsa minorem. Cum enim constet, in parabola, ordinatim-applicatas, quæ vertici propiores sunt quam ea quæ lateri-recto æquatur, longiores esse quam sunt diametri-interceptæ; adeoq; non ita convolvi posse parabolæ diametrum (dummodo infracta maneat) ut earum ordinatim-applicatarum extremitates in ipso vertice coeant, (quippe quod, quæ jam curvata supponitur, minor esse non possit, quam recta contermina, quæ prius erat ordinatim-applicata;) Necesse est ut vera Spiralis, quæ sic convoluta est, major sit quam ea quæ supponitur ex arcuum aggregato conflari, quam Parabolæ diametro convenire jam ostensum est, quippe quæ est ubiq; in duplicata ratione rectarum conterminarum.

PROP.

PROP. XVI. *Coroll.*

Parabola vero sic convoluta (hoc est, figura Spirali nostræ adjacens) est ejusdem Parabolæ evolutæ semissis.

E enim v. g. Si supponamus parallelogrammi PM latus PP ita convolvi, ut rectarum omnium PM puncta M in eodem puncto coeant, fiat ex Parallelogrammo (propter radios omnes a communi centro M æquales) circuli sector (qui circulo integro vel minor erit vel major vel æqualis, pro ea ratione quam ad invicem habeant rectæ PP, PM;) qui quidem Sector (hoc est Parallelogrammum convolutum) erit Parallelogrammi (evoluti) Semissis; (propterea quod pro infinitis Parallelogrammis ex quibus Parallelogrammum expositum constare supponitur, fiunt totidem in Sectore triangula easdem & bases & altitudines habentia:) Pari modo, si ita convolvetur Parabola ut dictum est, & ordinatim-applicatarum (pridem parallelarum) extrema altera in eodem puncto coeant; infinita illa parallelogramma ex quibus constare supponimus planum parabolæ (per ea quæ diximus ad prop. 2. & 8. Con. Sect.) fient totidem triangula easdem & bases & altitudines (cum illis parallelogrammis) habentia: & propterea Parabola sic convoluta (hoc est, figura Spiralis,) ipsius evolutæ semissis erit.

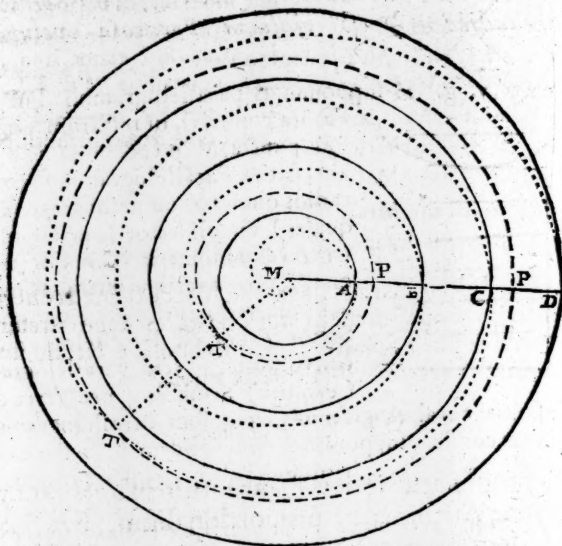


Atq; hoc quidem convenit cum iis quæ habet Torricellius Exempl. 8. eorum quæ ipsius tractatui de solido Hyperbolico præmisit; utut a principiis plane diversis petita.

PROP. XVII. *Corollarium.*

INsuper, *Segmenta spiralis, quæ fiunt circulationibus prima, secunda, tertia, quarta, & sic deinceps; sunt*

inter se ut 1, 3, 5, 7, & sic deinceps in progressione arithmetica.

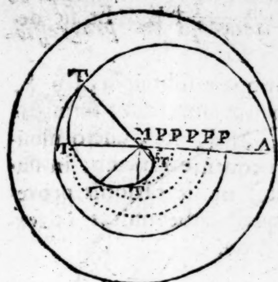


Sunt enim (per 10) spirales MA, MAB, MABC, MABCD, &c. ut 1, 4, 9, 16, &c. ergo segmenta spiralium MA, AB (= MAB − MA,) BC (= MABC − MAB,) CD (= MABCD − MABC,) &c. ut 1, (4 − 1 =) 3, (9 − 4 =) 5, (16 − 9 =) 7. &c.

PROP. XVIII. *Coroll.*

ET universaliter, *Ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuo PMT, TMT, &c.) æquales invicem facientibus, erunt spiralis segmenta continuè intercepta, (MT, TT, &c.) ut* 1, 3, 5, 7, *&c.*

Cum enim (propter æquales angulos) ipsæ rectæ MT, MT,



MT, &c. ſint ut 1, 2, 3, 4, &c. (per conſtructionem ſpiralis:) & propterea curvæ MT, MT, &c. (iſtis rectis conterminæ) ſint in rectarum ratione duplicata (per prop. 11.) nempe ut 1, 4, 9, 16, &c. erunt ipſa ſegmenta continua, MT, TT, &c. ut 1, 4 − 1, 9 − 4, 16 − 9, Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Tota hæc de longitudine lineæ ſpiralis doctrina, continuis quatuordecim propoſitionibus jam tradita, eſt apud Archimedem in libro de lineis Spiralibus penitus omiſſa: Neſcio an ab alio quopiam ex recentioribus tradita fuerit.

PROP. XIX. *Lemma.*

SI proponatur ſeries Quantitatum in *duplicata* ratione Arithmeticè-proportionalium, (ſive juxta ſeriem numerorum quadraticorum,) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 4, 9, 16, &c.) propoſitum ſit inquirere, quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium?

Fiat inveſtigatio per modum inductionis, (ut in prop. 1.) eritq; $\frac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. $\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$. $\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$. $\frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80} = \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$. $\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150} = \frac{11}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}$.

0+

$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252} = \frac{13}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{36}$. Et sic deinceps.

Ratio proveniens est ubiq; major quam subtripla, seu $\frac{1}{3}$. Excessus autem perpetuò decrescit prout numerus terminorum augetur; puta $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}$ &c, aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis numero senario, (ut patet,) ut sit rationis provenientis excessus supra subtriplum, ea quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post o, adeoq; ----

PROP. XX *Theorema.*

SI proponatur series quantitatum in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum) continue crescentium, a puncto vel o inchoatarum; ratio quam habet illa ad seriem totidem maxime æqualium, subtriplam superabit; eritq; excessus, ea ratio quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post o; sive, quam habet radix quadratica termini primi post o, ad sextuplum radicis quadraticæ termini maximi.

Puta (si terminus post o primus ponatur 1, & ultimi latus l) $\frac{l+1}{3}l^2 + \frac{l+1}{6l}l^2$. Vel (posito numero terminorum a, & ultimi latere l,) $\frac{a}{3}l^2 + \frac{a}{6a-6}l$.

Patet ex Prop. præced.

Cùm autem crescente numero terminorum, excessus ille supra rationē subtriplum ita continuo minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat, (ut patet;) si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est. Adeoq; ----

PROP.

PROP. XXI. *Theorema.*

SI pro ponatur ſeries infinita Quantitatum in duplicata ratione arithmetice-proportionaliū, (ſive juxta ſeriem numerorum quadraticorum,) continue creſcentium, a puncto ſeu o inchoatarum; erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 3.

Patet ex præced.

PROP. XXII. *Corollarium.*

IDeoq; *Conus vel Pyramis ad Cylindrum vel Priſma (ſuper eadem vel æquali baſe æquè altum) eſt ut* 1 *ad* 3.

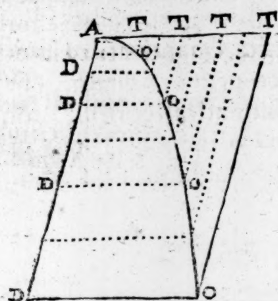
Conſtare enim ſupponimus tam Conum quam Pyramidem ex infinitis planis ſimilibus & parallelis, in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium conſtitutis, quorum minimum ſupponitur Punctum, maximum verò baſis; (per ea quæ diximus ad Prop 6. Con. Sect.) Cylindrus autem vel Priſma, ex totidem maximo æqualibus (ut patet:) Ratio igitur eſt ut 1 ad 3. per præced.

PROP. XXIII. *Coroll:*

ITem *Complementum Semi-parabolæ, (intellige figuram AOT quæ cum ipſa ſemi-parabola complet Parallelogrammum,) eſt ad Parallelogrammum TD (ſuper eadem vel æquali baſe æquè-altum) ut* 1 *ad* 3. *(Et conſequenter, ipſa ſemi-parabola eſt ad idem Parallelogrammum, ut* 2 *ad* 3.)

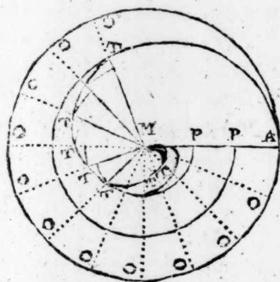
Eſto enim Figuræ AOT vertex A, diameter AT, baſis TO, eiq; parallelæ quotlibet (Eaſdem inter & verticem) TO, TO, &c. Quoniam ſunt (per prop. 21 Con Sect.) rectæ DO, DO, &c. in ſubduplicata ratione rectarum AD, AD, &c. Erunt

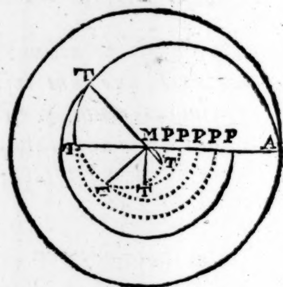
è contra ipsæ AD, AD, &c. hoc est TO, TO, &c. in ratione duplicata ipsarum DO, DO, &c. hoc est AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (constans ex Infinitis rectis TO, TO, &c. in duplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmeticè proportionalium) erit ad Parallelogrammum æquè altum TD (constans ex totidem rectis ipsi TO maximæ æqualibus) ut 1 ad 3. per prop. 21. (Quod erat ostendendum.) Et consequenter, semiparabola AOD (parallelogrammi residuum) ad idem Parallelogrammum ut 2 ad 3.



PROP. XXIV. *Corollarium.*

ITem, *Figura* MTM, *quæ spirali MT (a principio spiralis M exorsa) & recta MT contermina continetur; est ad Sectorem correspondentem PMT; ut* 1 *ad* 3.





Nam (ut diximus ad Prop. 5.) constare supponimus Figuram

ram illam MTM ex infinitis Sectoribus similibus, quorum radii sunt Arithmeticè-proportionales, adeoq; Sectores ipsi in duplicata ratione Arithmeticè-proportionalium (quippe suorum laterum;) Sectorem autem PMT ex totidem Sectoribus maximo æqualibus: Eritq; propterea Figura illa ad hanc, ut 1 ad 3. per prop. 21.

Sectoris autem nomine hic appello etiam Sectorum quotlibet aggregatum, licet semi-circulum (aut quidem circulum integrum) æquet vel etiam superet; (sicut & de Anguli appellatione supra monuimus, ad Prop. 5.)

PROP. XXV. *Corollarium.*

Et propterea, *Figura MTA quæ spiralis circulatione prima describitur, æquatur trienti circuli primi, AA.*

Nam correspondens Sector conterminus est ipse circulus integer AA, circuli primi radio MA eodem tempore descriptus.

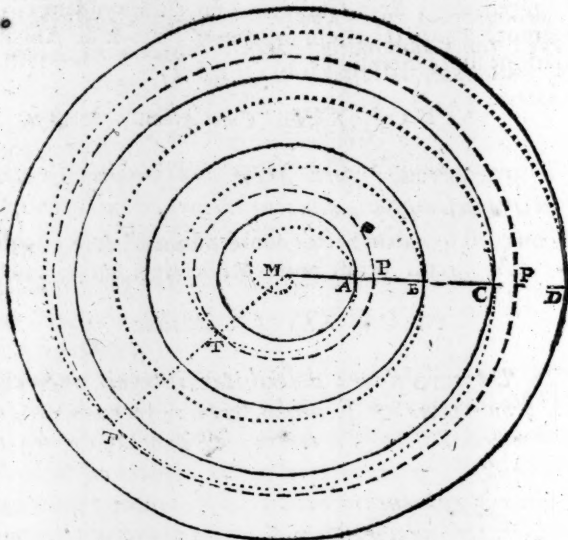
PROP. XXVI. *Corollarium.*

Quæ vero *figura describitur integris circulationibus prima & secunda; prima, secunda & tertia, prima, secunda, tertia, & quarta; & sic deinceps: (quâlibet parte toties repetita, quoties circulando describitur:) æquatur trienti circuli secundi, tertii, quarti, &c. bis, ter, quater, &c: (juxta numerum circulationum) sumpti.*

Nam dum describitur spiralis MAB (duabus circulationibus facta) a puncto mobili ab M ad B (in recta circumducta MB) pro moto; & simul figura plana a recta (sic continuè crescente) circumducta: Eodem tempore describitur (a rectâ totâ MB circumducta) circulus secundus bis. Adeoq; quot partibus continuè crescentibus (in ratione duplicata Arithmeticè proportionalium) constat figura illa Spirali terminata, totidem maximæ æqualibus constabit circulus ille bis descriptus. Quare figura sic descripta spirali adjacens, erit ad circulum

conterminum BB bis ſumptum ut 1 ad 3. per prop. 24.

Et pariter figura ſpiralis, quæ circulationibus primâ, ſecundâ & tertia deſcribitur, erit ad circulum tertium ter ſumptum, ut 1 ad 3. Et quæ deſcribitur circulationibus primâ, ſecunda, tertia & quarta, ad circulum quartum quater ſumptum, item ut 1 ad 3. Et ſic deinceps.



Notandum hic, quod tota figura ſpiralis, primâ circulatione deſcripta, in ſecunda circulatione repetitur; & quæ deſcribitur ſecundâ, repetitur in tertia; & ſic deinceps. Adeoq; v. g. in quatuor circulationibus, figura prima (quæ intra ſpiralem primam, primâ circulatione deſcriptam, continetur) quater, ſecunda (quæ inter ſpiralem primam & ſecundam jacet) ter, tertia (quæ inter ſpiralem ſecundam & tertiam jacet) bis, quarta ſemel deſcribitur: ideóq; figura prima quater, ſecunda ter, tertia bis, & quarta ſemel ſumpta, ſimul æquantur trienti circuli quarti quater ſumpti, nempe juxta numerum circulationum

tionum. Et pariter de quotvis circulationibus judicandum est, habita semper numeri circulationum consideratione.

PROP. XXVII. *Corollarium.*

SI autem *Spiralis ultra circulationem primam sed non duabus integris continuetur, figura spiralis sic descripta (bis sumpto quod bis describitur) æquabitur trienti tam integri circuli contermini, quam ejusdem continuationis supra circulum integrum.*

Nam interea dum describitur figura spiralis MATM, describitur etiam figura circularis aucta PPTM; nempe circulus integer PP, cum adjuncto etiam sectore PMT.

PROP. XXVIII. *Corollarium.*

ET pariter, *si Spiralis continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; figura spiralis sic descripta (repetitâ toties qualibet parte quoties describitur,) æquabitur trienti tam integri circuli contermini bis, ter, quater, aut sæpius sumpti (pro numero nempe integrarum circulationum,) quàm etiam additamenti sive sectoris adjuncti.*

Quia nempe dum figura illa spiralis (a circumducta recta crescente) describitur, toties describitur, (à recta circumducta æquabili) circulus conterminus, atq; insuper additamentum.

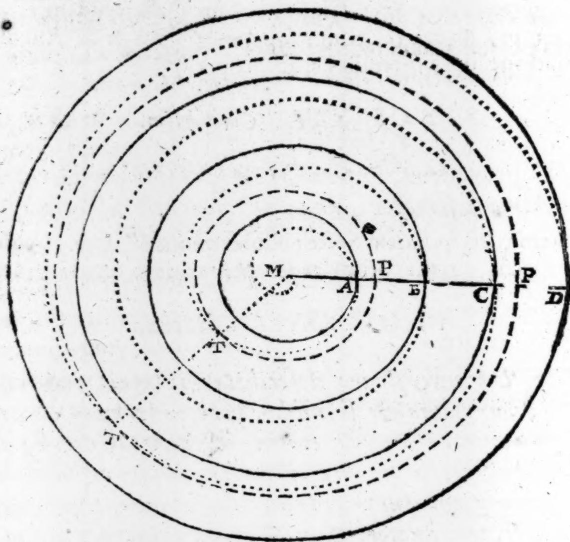
PROP. XXIX. *Coroll.*

ATq; insuper. *Figuræ spirales quæ prima, quæ prima & secunda, quæ prima, secunda & tertia, quæ prima, secunda, tertia & quarta, (& sic deinceps) circulationibus describuntur, (puta MAM, MABM, MAECM, MABCDM, &c.) se habent ad invicem ut numerorum Arithmeticè proportionalium cubi,* 1,

 8,

conterminum BB bis ſumptum ut 1 ad 3. per prop. 24.

Et pariter figura ſpiralis, quæ circulationibus primâ, ſecunda & tertia deſcribitur, erit ad circulum tertium ter ſumptum, ut 1 ad 3. Et quæ deſcribitur circulationibus primâ, ſecunda, tertia & quarta, ad circulum quartum quater ſumptum, item ut 1 ad 3. Et ſic deinceps.



Notandum hic, quod tota figura ſpiralis, primâ circulatione deſcripta, in ſecunda circulatione repetitur; & quæ deſcribitur ſecundâ, repetitur in tertia; & ſic deinceps. Adeoq; v. g. in quatuor circulationibus, figura prima (quæ intra ſpiralem primam, primâ circulatione deſcriptam, continetur) quater, ſecunda (quæ inter ſpiralem primam & ſecundam jacet) ter, tertia (quæ inter ſpiralem ſecundam & tertiam jacet) bis, quarta ſemel deſcribitur: ideóq; figura prima quater, ſecunda ter, tertia bis, & quarta ſemel ſumpta, ſimul æquantur trienti circuli quarti quater ſumpti, nempe juxta numerum circulationum

tionum. Et pariter de quotvis circulationibus judicandum est, habita semper numeri circulationum consideratione.

PROP. XXVII. *Corollarium.*

SI autem *Spiralis ultra circulationem primam sed non duabus integris continuetur, figura spiralis sic descripta (bis sumpto quod bis describitur) æquabitur trienti tam integri circuli contermini, quam ejusdem continuationis supra circulum integrum.*

Nam interea dum describitur figura spiralis MATM, describitur etiam figura circularis aucta PPTM; nempe circulus integer PP, cum adjuncto etiam sectore PMT.

PROP. XXVIII. *Corollarium.*

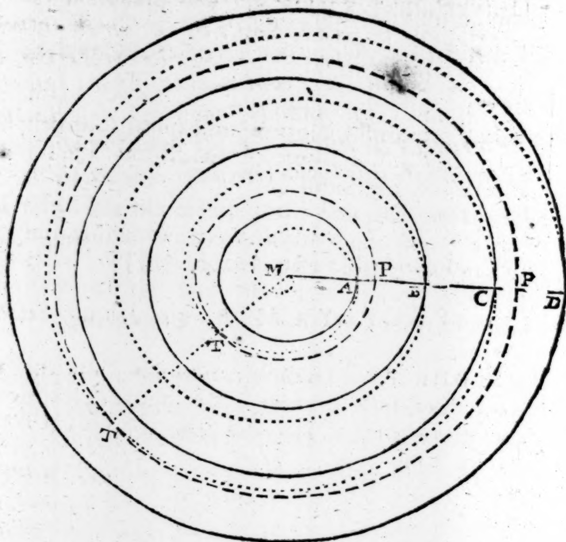
ET pariter, *si Spiralis continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; figura spiralis sic descripta (repetitâ toties qualibet parte quoties describitur,) æquabitur trienti tam integri circuli contermini bis, ter, quater, aut sæpius sumpti (pro numero nempe integrarum circulationum,) quàm etiam additamenti sive sectoris adjuncti.*

Quia nempe dum figura illa spiralis (a circumducta recta crescente) describitur, toties describitur, (a recta circumducta æquabili) circulus conterminus, atq; insuper additamentum.

PROP. XXIX. *Coroll.*

ATq; insuper, *Figuræ spirales quæ prima, quæ prima & secunda, quæ prima, secunda & tertia, quæ prima, secunda, tertia & quarta, (& sic deinceps) circulationibus describuntur, (puta MAM, MABM, MABCM, MABCDM, &c.) se habent ad invicem ut numerorum Arithmeticè proportionalium cubi,* 1,

8, 27, 64, &c: *sive in triplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c.*



Sunt enim rectæ MA, MB, MC, MD, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. (ut sæpius dictum est,) ideoq; circuli primus, secundus, tertius, quartus, &c. (his radiis descripti) ut 1, 4, 9, 16, &c. (nempe in duplicata ratione radiorum; adeóq; si ponatur circulus primus A = 1 c, erit secundus B = 4 c, tertius C = 9 c, quartus D = 16 c, &c; & propterea si sumatur primus semel, secundus bis, tertius ter, quartus quater, &c. erunt 1 A = 1 c, 2 B = 2 × 4 c = 8 c, 3 C = 3 × 9 c = 27 c, 4 D = 4 × 16 c = 64 c, &c. adeoq; ad invicem ut numeri cubici 1, 8, 27, 64, &c. quapropter & horum trientes $\frac{1}{3}$ c, $\frac{8}{3}$ c, $\frac{27}{3}$ c, $\frac{64}{3}$ c, &c. hoc est, (per prop. 25, 26) figuræ spirales MAM, MABM, MABCM, MABCDM, &c, sunt etiam inter se ut numeri cubici 1, 8, 24, 64, &c.

PROP.

PROP. XXX. *Corollarium.*

ET Universaliter, *Figuræ spirales (a spiralis principio exorsæ, & eâdem vel simili lineâ spirali terminatæ) sunt ad invicem in triplicata ratione rectarum conterminarum.*

Cum enim (per constructionem lineæ spiralis) eadem sit ratio rectarum MT, MT, quæ est angulorum PMT, PMT, (sumpta *Anguli* voce, eo sensu quo supra prop. 5. ut & *sectoris* voce, eo sensu quo supra prop. 24.) sectorum PMT, PMT, ad invicem ratio (quæ componitur ex ratione angulorum & duplicata ratione radiorum,) est rectarum MT, MT, ad invicem, ratio triplicata: Et propterea eadem erit etiam ad invicem ratio figurarum spiralium MTM, MTM, quæ illorum Sectorum sunt trientes. per pr 24. *In Figura Prop. 29.*

Sic v.g. si recta MA (unius circulationis) dicatur 1 *r*, & circulus eo radio descriptus dicatur 1 *c*; figura spiralis eodem tempore descripta erit $\frac{1}{3}c$. Igitur in una circulatione cum semisse fict recta contermina $1\frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r$; circulus conterminus $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times c = \frac{9}{4}c$, qui ductus in $\frac{3}{2}$ (numerum circulationum) fit $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times c = \frac{27}{8}c$, ejusq; triens $\frac{9}{8}c$, est figura spiralis quæ & circulatione integra & insuper semisse describitur. Et similiter in quantacunq; circulatione.

PROP. XXXI. *Corollarium.*

SI vero *ejusmodi figuræ spirales, lineis spiralibus dissimilibus, & rectis æqualibus terminentur: (Puta si MB in una spirali, tanta sit, quanta MC in alia:) erunt figuræ illæ spirales homologis suis rectis (puta MA in unâ, & MA in altera) reciproce-proportionales.*

Nam in prima erit figura MABM (duabus circulationibus descripta) æqualis trienti circuli sui B bis sumpti. Et in secunda, figura MABCM (tribus circulationibus descripta) æqualis

qualis trienti circuli sui C ter sumpti. (per prop. 29, 30.) cumq; supponantur æquales circuli B in primâ & C in secunda (propter æquales radios,) erunt figuræ spirales MABM prima, & MABCM secunda, ad invicem, ut 2 ad 3, nempe ut circulus bis sumptus ad eundem vel æqualem ter sumptum;) hoc est, in reciproca ratione rectarum homologarum MA, MA. Nam MA in prima est $\frac{1}{2}$ rectæ MB, & MA in secunda $\frac{1}{3}$ (æqualis rectæ) MC; sunt igitur MA in secunda, ad MA in primâ, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel $\frac{2}{6}$ ad $\frac{3}{6}$, vel 2 ad 3 Ideoq; Figura MABM in spirali primâ, ad figuram MABCM in spirali secunda, ut recta MA in secunda ad rectam MA in primâ.

Atq; idem similiter ostendetur, quæcunq; sit ratio homologarum rectarum in dissimilibus spiralibus.

PROP. XXXII. *Corollarium.*

SI autem *ejusmodi figuræ spirales, lineis spiralibus dissimilibus, & rectis item inæqualibus terminentur; erunt illæ ad invicem in ratione quæ componitur ex triplicata ratione rectarum terminantium, & reciproca ratione rectarum homologarum.*

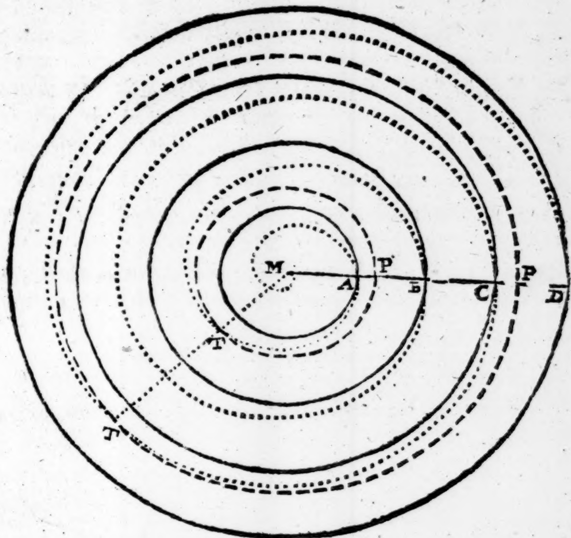
Sequitur ex Prop. 30, 31.

PROP. XXXIII. *Corollarium.*

POrro, *Figuræ spirales, quæ circulationibus prima, secunda, tertia, quarta, &c. describuntur, sunt ad invicem, ut* 1, 7, 19, 37, 61, &c. *nempe ut differentiæ numerorum cubicorum, quorum latera sunt Arithmeticè-proportionalia.*

Nam (per pr. 29.) quæ prima, quæ prima & secunda, quæ prima secunda & tertia, quæ prima secunda tertia & quarta, &c. describuntur: sunt ut 1, 8, 27, 64, 125, &c. ergo, quæ prima, quæ secunda, quæ tertia, quæ quarta, &c. describuntur sunt ut 1, 8 − 1, 27 − 8, 64 − 27, 125 − 64 &c. hoc est,

eft, ut 1, 7, 19, 37, 61, &c, nempe ut differentiæ numero-



rum cubicorum continue proximorum; Quarum quidem differentiarum excessus, sive differentiarum differentiæ, sunt Arithmetice proportionales: Nam $1+6=7$. $7+12=19$. $19+18=37$. $37+24=61$. &c.

PROP. XXXIV. *Coroll.*

ET universaliter, *Ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos PMT, TMT, &c, æquales invicem facientibus; figuræ spirales continuæ, his rectis interpositæ sunt ad invicem, ut* 1, 7, 19, 37, 61. *&c.*

Nam (per prop. 30.) Figuræ spirales a principio ad has lineas continuatæ sunt ut 1, 8, 27, 64, 125, &c; Ergo Figuræ invicem continuè sequentes his rectis terminatæ sunt ut 1, 8 –

$1 = 7$, $27 - 8 = 19$, $64 - 27 = 37$, $125 - 64 = 61$. &c. Vel ut $\frac{1}{3}c$, $\frac{7}{2}c$, $\frac{19}{3}c$, $\frac{37}{3}c$, $\frac{61}{3}c$. &c.

PROP. XXXV. *Coroll.*

Deniq; Figuræ spiralis portiones, quæ in singulis circulationibus de novo describuntur, (præter illud quod in præcedenti circulatione descriptum fuerat,) nempe quod intra spiralem primam continetur, quod inter primam & secundam, quod inter secundam & tertiam, quod inter tertiam & quartam, &c. sunt ad invicem ut 1, 6, 12, 18, 24, *&c. (addendo semper, post locum secundum, numerum senarium;) Nempe ut differentiæ differentiarum numerorum cubicorum.*

Sequitur ex 33. Quia 1, $7 - 1$, $19 - 7$, $37 - 19$, $61 - 37$, &c. sunt ut 1, 6, 12, 18, 24. &c.

SCHOLIUM.

Hæc autem de areâ figuræ spiralis doctrina, continuis duodecim propositionibus jam tradita, consona est illis quæ tradit Archimedes circa finem libri de *Lineis Spiralibus*. Libet autem id ipsum paulo ulterius prosequi.

PROP. XXXVI. *Coroll.*

Complementum figuræ spiralis (quod nempe cum ipsa sectorem conterminum complet) est ad sectorem conterminum, ut 2 *ad* 3.

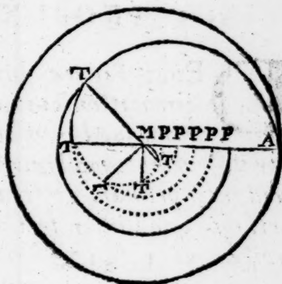
Sequitur hoc quidem ex prop. 24. Sed id ipsum aliter ostendemus hoc modo.

Constare supponamus figuram PMTT (complementum figuræ spiralis MTTM) ex infinitis arcubus PT, PT, &c. qui quidem sunt in duplicata ratione rectarum MP, MP, Arithmeticè proportionalium, (ut ostendimus ad prop. 11) sector autem conterminus MPT, ex totidem constabit arcubus, ipsis

MP,

MP, MP, proportionalibus, adeoq; Arithmetice proportionalibus, (ut patet:)

Est autem series ejusmodi, (in duplicata ratione Arithmetice proportionalium) $\frac{1}{3}$ seriei aequalium, (per prop 21,) & series Arithmetice proportionalium $\frac{1}{2}$ ejusdem seriei aequalium (per prop 2) Ergo illa ad hanc (hoc est, complementum figurae Spiralis ad Sectorem) ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$ (hoc est) ut 2 ad 3.



PROP. XXXVII. *Corollarium.*

ET speciatim; *Complementum figurae spiralis unâ circulatione descriptae, est ad circulum primum (ipsi conterminum) ut 2 ad 3.*

Nam constabit complementum illud ex infinitis arcubus PT, in ratione duplicata rectarum MP arithmetice-proportionalium (sive ut 0, 1, 4, 9, &c.) quorum maximus est integra peripheria A; constat autem circulus ille integer ex totidem peripheriis Arithmetice-proportionalibus, ut 0, 1, 2, 3, &c. quarum etiam maxima est eadem peripheria A: Ideoq; Complementum illud, ad hunc circulum, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, hoc est, ut 2 ad 3.

PROP. XXXVIII. *Corollarium.*

SPatia vero *quod figuris spiralibus in singulis circulationibus deest ad complendum suum circulum; sunt ut* 2, 5, 8, 11, 14, *&c. Arithmetice proportionales.*

Cum enim (posito circulo primo c) erunt (per prop. 29 & 33) figurae spirales circulatione prima descripta $\frac{1}{3}c$, secunda $\frac{7}{3}c$, tertia $\frac{19}{3}c$, quarta $\frac{37}{3}c$.&c, circuli autem contermini

primus 1 c, secundus 4 c, tertius 9 c, quartus 16 c, &c. erit excessus circulorum, supra figuras spirales conterminas, primi $\frac{2}{3}c$, secundi $\frac{5}{3}c$, tertii $\frac{8}{3}c$, quarti $\frac{11}{3}c$. &c. Nam $1c - \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}c$. $4c - \frac{7}{3}c = \frac{5}{3}c$. $9c - \frac{19}{3}c = \frac{8}{3}c$. $16c - \frac{37}{3}c = 11c$. &c.

SCHOLIUM.

Et quidem facile esset complures propositiones alias hisce similes adjungere, tam de ipsis figuris spiralibus quam earum complementis; tam quæ circulationibus integris describuntur, quam intermediis. Sed ex dictis facile poterit quilibet eas, si opus videbitur, supplere, ut non necesse sit diutius hic morari. Et metuo ne jamjam nimius fuerim. Adjungam tamen unum aut alterum ex dictis Corollarium, (in eorum gratiam, qui dubitant, an possibile sit figuram aliquam rectilineam circulo æqualem esse:) Nempe ....

PAtet ex dictis; *Circulo cuilibet figuram aliquam rectilineam æqualem esse.*

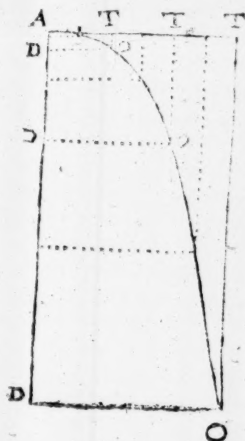
Cum enim patet (ex pr. 25.) circulo cuilibet figuram aliquam spiralem æqualem esse; & (ex prop. 16.) cuilibet figuræ spirali aliquam parabolam; & deniq; (ex pr. 23.) cuilibet Parabolæ aliquam figuram rectilineam, sequitur & cuilibet circulo figuram aliquam rectilineam æqualem esse.

Non sunt igitur vel rectilineum & circulus, vel linea recta & curva, quantitates adeo inter se heterogeneæ, quin & invicem rite comparari, & quidem invicem æquales esse possint: Quanquam fieri possit ut circuli diameter & perimeter eousq; sint irrationales, ut nec veris numeris, nec etiam ullo adhuc in usum recepto notationis modo, earum ad invicem ratio exprimi possit.

POrro: Ex jam traditis innotescit etiam methodus *Rectam Parabolicæ (vel etiam Paraboloidicæ) æqualem quam proximè, inveniendi.*

Si enim, quæ semiparabolam rectam in vertice contingat recta AT, in quotlibet æquales particulas divisa; (quarum quælibet dicatur a, atq; numerus omnium n;) & in singularum particularum

particularum terminis ad tangentem illam totidem ordinatim applicentur rectæ, (Parabolæ diametro propterea parallelæ, & facientes ad Tangentem angulos rectos,) TO, TO, &c. quarum minima dicatur 1; erunt illæ ad invicem per prop. 23. ut numeri quadratici 1, 4, 9, 16, &c. & earum differentiæ ut 1, 3, 5, 7, &c. numeri impares deinceps ab unitate; (quarum differentiarum maxima erit $2n-1$.) Rectæ parallelarum illarum terminos (in linea Parabolica constitutos) connectentes, (quæ erunt propterea ipsi parabolæ deinceps inscriptæ,) erunt ut $\sqrt{:a^2+1}$. $\sqrt{:a^2+9}$. $\sqrt{:a^2+25}$ $\sqrt{:a^2+49}$ &c. (quippe quarum quadrata per 47 e 1. æquantur quadratis tam particularum a, quam differentiarum inter proximas quasque parallelas, hoc est, numerorum imparium.) Quæ quidem rectæ (parabolæ inscriptæ) quo plures fuerint, eò propius ad parabolicæ mensuram accedet earum omnium aggregatum; ita tamen ut ex omnibus sic aggregata recta sit ipsâ parabolicâ minor.

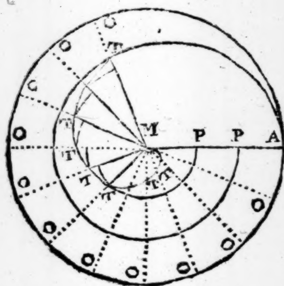


Sin velit aliquis rectam justa majorem (ut constet intra quos cancellos determinare possit parabolicæ longitudinem;) neque difficilis erit hæc investigatio, tangentium ope perficienda.

Si vero curva AOO, non supponatur Parabola, sed paraboloides Cubicale, Biquadricale, &c. Idem processus erit, mutatis mutandis, atque in Parabola. Sumendæ enim pro parallelarum differentiis, non 1, 3, 5, 7, &c. differentiæ numerorum Quadraticorum; sed 1, 7, 19, 37, &c. differentiæ numerorum cubicorum; vel 1, 15, 65, 175, &c. differentiæ numerorum Biquadraticorum; &c. prout Paraboloideos cujusq; natura postulet; adeoq; inscriptæ erunt $\sqrt{:a^2+1}$. $\sqrt{:a^2+49}$. &c. vel $\sqrt{:a^2+1}$. $\sqrt{:a^2+225}$. &c. & sic deinceps. Ut ex inferius tradendis pr. 45. patebit.

EAdem fere methodo, *Invenietur recta Spirali genuinæ quam-proximè æqualis.*

Si enim (per ea quæ dicta sunt prop. 5.) supponatur inscribi figuræ spirali alia ex quotlibet sectoribus similibus conflata: Erunt (propter spiralem) tam sectorum arcus, quam horum sinus sive recti sive versi, ut & radii, arithmetice proportionales. Radiorum autem continuum augmentum dicatur a. Si igitur a sectoris cujusvis arcus initio ad radium per ipsius term nũ ductũ demitti supponatur perpendicularis, erit illa istius arcus sinus rectus, cujus quadratum simul cum quadrato sinûs versi communi augmento a aucti, æquabitur quadrato rectæ Spirali inscriptæ: (per 47 e 1.) Sinus autem versus ille dicatur. v, & totius circuli sui diameter d; erit igitur quadratum sinus recti (ex ductu sinûs versi v in diametri residuum $d - v$ factum) $vd - v^2$; & quadratum sinûs versi communi augmento aucti (nempe $v + a$) erit $v^2 + 2va + a^2$: & propterea quadratum inscriptæ (ex his conflatum) $vd + 2va + a^2$.



Cum autem (propter æquales similium Sectorum angulos) eadem sit ubiq; sinûs versi ad diametrum ratio, esto ea quam habet 1 ad m (quæ ratio major minorve reputanda erit prout singulorum sectorum anguli majores minoresve fuerint:) Adeoq; cum sit $1.m :: v.d$, erit $d = vm$: & propterea quadratum rectæ spirali inscriptæ $vd + 2va + a^2 = vvm + 2va + a^2$. Deniq;, cum sint similium illorum sectorum deinceps positorum arcus, adeoq; & sinus versi, arithmetice proportionales, (ab o inchoati,) dicantur illi 0, 1, 2, 3 &c. Erunt ergo inscriptæ illæ $\sqrt{:}\ 0m + 0a + 1^2$. $\sqrt{:}\ 1m + 2a + a^2$. $\sqrt{:}\ 4m + 4a + a^2$. $\sqrt{:}\ 9m + 6a + a^2$. $\sqrt{:}\ 16m + 8a + a^2$ Et sic deinceps Quò autem plures supponantur eidem figuræ spirali sectores inscribi, eò propius ad lineam spiralem accedet rectarum

sic

ſic inſcriptarum aggregatum : quod tamen vera ſpirali perpetuo minus erit.

Si autem harum inſcriptarum prima omittatur, & illius vice poſt ultimam ſubjungatur quæ proximè erat inſecutura, (quod tantundem eſt atq; pro figura ex ſectoribus inſcripta, circumſcriptam ſubſtituere,) atq; tandem addatur *a* ; habebitur ex omnibus aggregata recta quæ vera ſpirali major erit ; ſed quæ ad juſtam eo propius accedet quò plures ſupponantur Sectores adſcribi.

Et ſimili forma procedendum erit (mutatis mutandis) in aliis Spiralium generibus in Scholio Prop. 45. memoratis.

PROP. XXXIX. *Lemma.*

SI proponatur ſeries quantitatum in *Triplicata* ratione Arithmeticè-proportionalium , (ſive juxta ſeriem numerorum Cubicorum,) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 8, 27, 64, &c.) propoſitum ſit inquirere quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium ?

Fiat inveſtigatio per modum inductionis (ut in prop. 1. & 19.) Eritq; $\frac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. $\frac{0+1+8=9}{8+8+8=24} = \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

$$\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108} = \frac{4}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}.$$

$$\frac{0+1+8+27+64=100}{64+64+64+64+64=320} = \frac{5}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}.$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125=225}{125+125+125+125+125+125=750} = \frac{6}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125+216=441}{216+216+216+216+216+216+216=1512} = \frac{7}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24}.$$

Et ſic deinceps.

Ratio proveniens eſt ubiq; major quam ſubquadrupla, ſeu $\frac{1}{4}$.

Exceſ-

Exceſſus autem perpetuò decreſcit prout numerus terminorum augetur, puta $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{24}$. &c. aucto nimirum fractionis denominatore, ſive conſequente rationis, in ſingulis locis, numero quaternario, (ut patet;) ut ſit rationis provenientis exceſſus ſupra ſubquadruplam, ea quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o. Adeoq; ----

PROP. XL. *Theorema.*

SI proponatur ſeries quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum; ratio, quam habet illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ſubquadruplam ſuperabit; eritq; exceſſus, ea ratio quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o; ſive, quam habet radix cubica termini primi poſt o, ad quadruplum radicis cubicæ termini maximi.

Puta $\frac{l+1}{4} l^3 + \frac{l+1}{4l} l^3$ vel $\frac{n}{4} l^3 + \frac{n}{4l} l^3 = \frac{1}{4} n l^3 + \frac{1}{4} n l^2$.

Patet ex præcedente.

Cùm autem, creſcente numero terminorum, exceſſus ille ſupra rationem ſubquadruplam ita continuò minuatur, ut tandem quolibet aſſignabili minor evadat, (ut patet;) Si in infinitum procedatur, prorſus evaniturus eſt. Adeóq; ----

PROP. XLI. *Theorema.*

SI proponatur ſeries infinita quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continue creſcentium, a puncto ſeu o inchoatarum; erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1, ad 4.

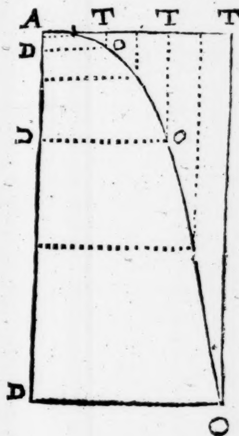
Patet ex præcedente.

PROP

PROP. XLII. *Corollarium.*

IDeoq; , *Complementum semi-paraboloidis cubicalis, AOT, est ad Parallelogrammum TD (super eâdem vel æquali base æquè altum,) ut 1 ad 4. (Et, consequenter, ipsum semiparaboloides ad idem Parallelogrammum, ut 3 ad 4.)*

Esto enim Semiparaboloidis cubicalis AOD (cujus diameter AD, ordinatim applicatæ DO, DO, &c.) complementum AOT (cujus diameter AT, ordinatim-applicatæ TO, TO, &c.) Quoniam igitur (per pr.45. Con. Sect.) rectæ DO, DO, &c. vel ipsis æquales AT, AT, &c. sunt in subtriplicata ratione rectarum AD, AD, &c. vel ipsis æqualium TO, TO, &c. Erunt e contra ipsæ TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (constans ex infinitis rectis TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmeticè-proportionalium) erit ad Parallelogrammum TD, per præced. (constans ex totidem ipsi TO maximæ æqualibus) ut 1 ad 4. (Quod erat ostendendum.) Et consequenter, Semiparaboloides AOD (parallelogrammi residuum) ad idem parallelogrammum ut 3 ad 4.



PROP. XLIII. *Lemma.*

PAri methodo invenietur ratio seriei infinitæ quantitatum in ratione quadruplicata, quintuplicata, sextuplicata &c. Arithmeticè proportionalium, a puncto seu o inchoatarum, ad seriem

totidem maximæ æqualium. Nempe in Quadruplicatâ, erit ut 1 ad 5: in Quintuplicata, ut 1 ad 6: in sextuplicata, ut 1 ad 7. Et sic deinceps.

Facto enim experimento patebit rationes inductione repertas ad has continuo propiùs accedere, ita ut differentia tandem evadat quâvis assignabili minor; adeoq; in infinitum continuata evanescet.

Operosas demonstrationes lineares non adjungo; quas tamen, siquis postulet, poterit ille (modo vacet) tales exquirere figurarum inscriptione & circumscriptione, vel etiam aliàs præstandas; (quales habet Archimedes pr. 10, & 11, de lin. spiral.) ostendendo, quòd ratio neq; major neq; minor est quam assignata. At mihi sufficere videntur illæ quas produxi, Cavallerii *Methodum Indivisibilium* (quoniam eam invenio a Geometris jam esse receptam) secutus.

Nota tamen eas quibus usus sum demonstrationibus, potius figuras inscribendas imitari, cum supponant primum terminum 0. Si quis vero figuras circumscribendas imitari mallet, fieri quidem & illud potest, modo primus terminus ponatur 1.

Notandum etiam, rationes inductione quærendas, in seriebus illis quarum processus est in Arithmetice proportionalium ratione quadruplicata (& sequentibus) magis implicatas esse quam præcedentium.

Puta in Biquadratis $\frac{l+1}{5}l^4 + \frac{l+1}{10l}3l^4 + \frac{l+1}{30l^2}l^4 + \frac{-l-1}{30l^3}l^4$. Vel $\frac{n}{5}l^4 + \frac{3n}{10l}l^4 + \frac{n}{30l^2}l^4 - \frac{n}{30l^3}l^4 = \frac{1}{5}nl^4 + \frac{3}{10}nl^3 + \frac{1}{30}nl^2 - \frac{1}{30}nl$. (posito nempe termino primo 1, latere maximo l numero terminorum $n = l + 1$.)

In Surdesolidis autem $\frac{l+1}{6}l^5 + \frac{l+1}{3l}l^5 + \frac{l+1}{12l^2}l^5 + \frac{-l-1}{12l^3}l^5$. Vel $\frac{n}{6}l^5 + \frac{n}{3l}l^5 - \frac{n}{12l^2}l^5 - \frac{n}{12l^3}l^5 = \frac{1}{6}nl^5 + \frac{1}{3}nl^4 + \frac{1}{12}nl^3 - \frac{1}{12}l^2$.

Sed (quod nobis sufficit) ad debitam rationem ita continuè

magis

magis accedunt, ut tandem differentia evadat quavis assignabili minor.

SCHOLIUM.

Si quis autem cupiat rationes hujusmodi, utut intricatas, quæ sequentibus seriebus finitis quibuscunq; conveniat, (puta in sextuplicatâ, septuplicatâ, &c. ratione Arithmeticè proportionalium) invenire: quomodo illud fiat deinceps dicetur in Schol. prop. 108.

PROP. XLIV. *Theorema.*

IDeoq; si intelligatur series infinita quantitatum, a puncto seu o inchoatarum, & continuè crescentium pro ratione vel Arithmeticè-proportionalium, (quam seriem Lateralium sive *Primanorum* appello,) vel eorum quadratorum, cuborum, biquadratorum, &c. (quam appello seriem *Secundanorum*, *Tertianorum*, *Quartanorum*, &c.) Erit totius seriei ratio, ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ sequitur in hac Tabella. Nempe

Æqualium	$\frac{1}{1}$		1
Primanorum	$\frac{1}{2}$		2
Secundanornm	$\frac{1}{3}$		3
Tertianorum	$\frac{1}{4}$		4
Quartanorum	$\frac{1}{5}$		5
Quintanorum	$\frac{1}{6}$	Velut 1 ad	6
Sextanorum	$\frac{1}{7}$		7
Septimanorum	$\frac{1}{8}$		8
Octavanorum	$\frac{1}{9}$		9
Nonanorum	$\frac{1}{10}$		10
Decimanorum	$\frac{1}{11}$		11

Et sic deinceps. Ita ut fractionum Denominatores, sive Consequentes rationum, sint ab unitate Arithmetice proportionales; communis autem sive Numerator sive Antecedens 1.

PROP. XLV. *Corollarium.*

Hinc discimus methodum inveniendi aream complementi Parabolæ, & Paraboloideos Cubicalis, Biquadraticalis, Surdesolidalis, aut superioris cujuslibet potestatis; & consequenter, etiam aream Parabolæ, aut Paraboloideos cujuscunq; potestatis. Quod ostendere pollicitus sum ad prop. 48. Con. Sect.

Nempe, cùm complementum Parabolæ (vel Semiparabolæ) sit series secundanorum, (ut diximus ad prop. 23;) complementum Paraboloidis cubicalis (vel semiparaboloidis,) series Tertianorum, (ut diximus ad prop 42) atq; (eâdem ratione) complementum Paraboloidis Biquadraticalis, series Quartanorum; complementum Paraboloidis surdesolidalis, series Quintanorum; & sic deinceps: Erit horum ratio ad Parallelogrammum circumscriptum, (series nempe totidem maximo æqualium,) ea quæ est 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, 1 ad 6, & sic deinceps: juxta tabellam propositionis præcedentis. Et consequenter, ipsa Parabola, Paraboloides Cubicale, Biquadraticale, Surdesolidale, &c (quæ nempe cum suis complementis æquantur Parallelogrammis circumsctiptis) sunt ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 2 ad 3, 3 ad 4, 4 ad 5, 5 ad 6. &c.

SCHOLIUM.

Et hoc quidem pacto licebit infinitis figuris curvilineis æquales rectilineas constituere. Quodq; in sola Parabola (summa cum admiratione) præstitit Archimedes (& post illum alii) id nos in Paraboloide cujuscunq; potestatis jam præstitimus.

Quæ autem de Parabolis & Paraboloidibus hucusq; tradita sunt, aut etiam adhuc deinceps tradenda, possunt etiam Spiralibus facillimo negotio accommodari. Si enim supponamus rectam MT continuè augeri, non quidem in eadem ratione cum angulo PMT, (ut in Spirali Archimedea,) sed in ejusdem rationis duplicata, triplicata, quadruplicata, &c. orientur alia atq; alia Spiralium genera: quarum tamen ad peripheriam vel arcum (eo sensu quo dictum est in Schol. prop. 13. & 15) ratio

non minus innotescet (ut & figurarum adjacentium ratio ad circulum vel sectorem) quam in illa Archimedea. Exempli gratia. *Si augeatur recta MT in duplicata ratione anguli PMT; erit linea Spiralis (a principio inchoata) MT, ad arcum conterminum PT, ut 1 ad 3;* (quippe erit spiralis illa, series Secundanorum: arcus autem, series Æqualium:) *Et Figura adjacens erit ad conterminum Sectorem, ut 1 ad 4;* (nempe ut series Tertianorum ad seriem Æqualium:) *Et similiter, si crescat recta MT in anguli MPT ratione Triplicata, Quadruplicata, &c. Erit Spiralis (sensu quo supra) ad conterminum Arcum, ut 1 ad 4, 5, &c; & Figura adjacens ad sectorem conterminum, ut 1 ad 5, 6, &c.* Quæ omnia eodem modo (mutatis mutandis) demonstrabuntur, quo prop. 5, 24. &c. Atq; hinc quidem spiralium doctrina in immensum augeri possit. Cum autem id suo quilibet Marte per jam dicta satis possit intelligere, neq; nobis sit animus labore supervacaneo hæc ulterius ampliandi: sufficiat id in transitu monuisse.

Sed & hinc etiam facilis esset transitus ad Spirales non tantum in plano, sed in solido descriptas, puta in superficiebus Coni & Sphæræ, sive etiam conoidum & sphæroidum, rite considerandas; &, ad spirales aut Circulos in Cylindro comparandas: Figuras item illis adjacentes, ad figuras adjacentes hisce. Adhibitis tamen iis, quæ de seriebus auctis & diminutis deinceps secuturæ sunt, propositionibus. Hæc autem omnia, ne nimius sim, intacta prætereunda judico: Cum ea quilibet, ex iis quæ hic tradita sunt vel deinceps tradenda, facile possit deducere.

PROP. XLVI. *Lemma.*

Item (*per prop.* 44.) Data ratione quam habet series una, cujuslibet potestatis, (ad seriem æqualium;)

reperitur ratio quam habet alia ſeries alterius cujuſvis poteſtatis, (ad ſeriem item æqualium:) inveniendo nempe homologum terminum progreſſionis Arithmeticæ.

Ut, ſi Quadratorum ſive Secundanorum ſeries ſit $\frac{1}{3}$ ſeriei æqualium; erit ſeries Lateralium ſive Primanorum $\frac{1}{2}$ ſeriei æqualium: Quia, ut ſeries Primanorum media eſt inter ſeriem Æqualium & ſeriem Secundanorum, ſic 2 (conſequens rationis quæſitæ Primanorum) eſt media Arithmetica inter 1 & 3 (conſequentes rationum æqualium & ſecundanorum.)Sic cum cuborum ſive Tertianorum ratio ſit $\frac{1}{4}$ ſive 1 ad 4, inter quam ſeriem & ſeriem æqualium, duarum poteſtatum ſeries interjiciuntur; quærendæ ſunt duæ mediæ Arithmeticæ inter 1 & 4, puta 2 & 3, quarum illa Primanis, hæc Secundanis convenit. Et ſic in cæteris.

Et ſimiliter, ſi quærenda ſit ratio ſuperioris poteſtatis ſeriei conveniens; id reperitur progreſſionem continuando ad terminum quæſitum uſq; : Ut, ſi ſeries quartanorum rationem habent, ad ſeriem æqualium, eam quæ eſt 1 ad 5 ſive $\frac{1}{5}$: ſeries ſextanorum habebit rationem 1 ad 7: quia in progreſſione Arithmetica ubi terminus (poſt unitatem) quartus eſt 5, terminus ſextus erit 7. & pariter in reliquis.

PROP. XLVII. *Lemma.*

ATq; hæc regula non minus valebit ſi exponatur ſeries quantitatum quarumlibet (non quidem juxta ſeriem Primanorum, ſed) juxta quamvis aliam Tabellæ ſeriem, & de illarum Quadratis, Cubis, &c. inquiratur.

Verbi gratia. Si intelligatur ejuſmodi ſeries quantitatum quarumlibet ſecundum ſeriem Secundanorum (quibus aſſignatur in Tabella ratio 1 ad 3) diſpoſitarum: harum quadratis conveniet ratio 1 ad 5; (quia 1, 3, 5, ſunt arithmetice proportionales;) & cubis conveniet ratio 1 ad 7; & ſic deinceps

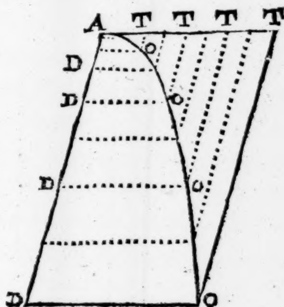
ceps; quia 1, 3, 5, 7, &c. sunt Arithmetice proportionales, prout Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, &c. sunt potestates proximè sequentes & Geometricè proportionales.

Nec hoc aliud est, quam quod habetur in Tabella; nam si quantitates assumptæ sint series Secundanorum, cujus ratio est $\frac{1}{3}$; earum quadrata erunt series Quartanorum, cujus ratio $\frac{1}{5}$; & earundem cubi erunt series Sextanorum, cujus ratio $\frac{1}{7}$; &c. ut dictum est.

PROP. XLVIII. *Corollarium.*

ET consequenter, *Conoides vel Pyramidoides complemento Semi-parabolæ (circa ipsius diametrum) aptandum, est ad Cylindrum vel Prisma super æquali base æquè altum, ut* 1 *ad* 5.

Nempe si complementum semi-parabolæ rectæ, AOT, manente recta AT, circumvolvatur, ut describatur Conoides rectum: vel, universaliter, si (juxta methodum a nobis indicatam prop. 5, 6, 9. Con. Sect.) diametro vel axi AT, ordinatim applicentur circuli, vel similia quævis plana, quorum vel radii vel rectæ similiter positæ rationem eandem habeant inter se quã rectæ TO, TO, &c. ut compleatur Conoides vel Pyramidoides sive rectum sive



inclinatum: dico illud Conoides vel Pyramidoides esse ad Cylindrum vel Prisma super eadem basi æquè altum ut 1 ad 5. Nam, cùm rectæ omnes TO, TO, &c. sunt series Secundanorum, (quibus convenit ratio 1 ad 3.) similia qualibet plana super has rectas similiter constituta, erunt inter se ut harum rectarum quadrata: sive in duplicata ratione rectarum TO, TO: At ratio seriei rectarum illarum conveniens (seriei quippe secundanorum

cundanorum) est 1 ad 3; ergo seriei planorum conveniet ratio 1 ad 5: quia nempe 1, 3, 5, sunt Arithmetice-proportionales: (prout Unitas, Radix, & quadratum sunt Geometricè-proportionales) Et quidem, si rectæ TO, TO, &c. sint series Secundanorum; earum quadrata (vel plana quadratis proportionalia) erunt series quartanorum; cui in Tabella convenit ratio 1 ad 5.

PROP. XLIX. *Corollarium.*

ET similiter; *Si complemento semiparaboloidis cubicalis aptetur (circa ipsius Diametrum) Conoides vel Pyramidoides; erit hoc ad Cylindrum vel Prisma (super eadem vel æquali base æquè altum,) ut 1 ad 7.*

Nam, cum rectæ TO, TO, &c. (in complemento Semiparaboloidis Cubicalis,) sint series Tertianorum, quibus in Tabella convenit ratio 1 ad 4; horum quadratorum (vel planorum quadratis proportionalium) seriei conveniet ratio 1 ad 7; quia 1, 4, 7, sunt Arithmetice proportionales. Vel etiam, quia plana sunt series Sextanorum, quibus in Tabella assignatur ratio 1 ad 7.

PROP. L. *Corollarium.*

ET pariter; *si semiparaboloidum aliorum (puta Biquadraticalium, Surdesolidalium, &c.) complementis aptetur (circa eorum diametros) Conoides vel Pyramidoides aliquod; habebit illud ad Cylindrum vel Prisma (super æquali base æquè altum) rationem notam (puta 1 ad 9, 1 ad 11, &c.)*

Cum enim complementorum illorum rectæ sint series quartanorum, quintanorum, &c. adeoque rationes in Tabellâ assignatas habeant 1 ad 5, 1 ad 6, &c. series quadratorum (vel planorum quadratis proportionalium) rationem habebunt 1 ad 9, 1 ad 11, &c. quia 1, 5, 9, vel 1, 6, 11, &c. sunt arithmetice

metice proportionales. Vel etiam, quia si rectæ sint series Quartanorum, Quintanorum, &c. plana similia ad has rectas similiter posita, erunt series Octavanorum, Decimanorum, &c. quibus convenit ratio 1 ad 9, 1 ad 11, &c.

SCHOLIUM.

Atq; hoc pacto figurarum solidarum superficiebus curvi comprehensarum ingens multitudo reduci possunt ad alias su superficiebus planis comprehensas; & corpora non modo conic (quod docuerunt veteres) sed & alia quamplurima conoidica, ad cylindrum reduci. Quod nescio an quispiam alius antehac ostenderit.

PROP. LI. *Lemma.*

J*Uxta eandem regulam (prop.* 46, 47.) Si exponatur series quantitatum quarumlibet, juxta quamlibet Tabellæ seriem; de illarum radicibus quadraticis, cubicis, &c. aut quibusvis intermediis potestatibus, pariter inquirendum erit.

Exsempli gratia; si exponantur infinita Quadrata (vel quælibet plana similia) juxta seriem Quartanorum; (cui assignatur, in Tabella, ratio 1 ad 5:) series laterum (vel rectarum in illis similiter positarum) rationem habebit (ad seriem æqualium) 1 ad 3: quia 1, 3, 5, sunt arithmetice proportionalia: vel etiam, quia ubi plana sunt series Quartanorum, eorum latera erunt series secundanorum, quibus assignatur in Tabellâ ratio 1 ad 3.

Sic, si exponantur cubi infiniti (vel quælibet similia solida) juxta seriem sextanorum, quibus in Tabella congruit ratio 1 ad 7; eorum lateribus cubicis (vel rectis in his similiter positis) conveniet ratio 1 ad 3; & horum laterum quadratis (vel planis in cubis illis similiter positis) ratio 1 ad 5; quia duarum mediarum arithmeticarum inter 1 & 7, minor est 3, major 5, (sunt enim 1, 3, 5, 7, arithmetice proportionalia: duas autem medias Arithmeticas interpono inter 1 & 7; quia totidem supponimus medias Geometricas inter unitatem & cubum, nempe Latus

& quadratum; sunt enim Unitas, Latus, Quadratum, Cubus, Geometrice proportionalia. Et quidem si Cubi sint series sextanorum, Latera erunt series secundanorum; & laterum quadrata, series quartanorum; quibus in Tabella conveniunt rationes 1 ad 3, 1 ad 5.

Si vero quantitates expositæ in eadem serie sextanorum, essent quadrata (vel plana quælibet similia) eorum lateribus conveniret ratio 1 ad 4. Quia inter 1 & 7 media Arithmetica est 4; sicut inter unitatem & quadratum media Geometrica est Radix vel Latus. Et quidem si quadrata sint series sextanorum, eorum Latera erunt series tertianorum; quibus in Tabella convenit ratio 1 ad 4.

PROP. LII. *Corollarium.*

ET propterea; *Ex cognitis rationibus quas habent Conoidea & Pyramidoidea, prop.* 48, 49, 50, *memorata, (ad Cylindrum vel Prisma, super æquali base æquealtum;) cognoscentur rationes quas habent plana illa unde construuntur, ad Parallelogrammum circumscriptum. Nempe complementum Semiparabolæ ut* 1 *ad* 3: *complementa Semiparaboloidis Cubicalis, Biquadraticalis, Surdesolidalis &c. ut* 1 *ad* 4, 1 *ad* 5, 1 *ad* 6. *&c.*

Si enim Conoidea ad Pyramidoidea illa cognoscantur esse series quartanorum, Sextanorum, Octavanorum, Decimanorum; &c. Eisq; convenire rationes 1 ad 5, 1 ad 7, 1 ad 9, 1 ad 11, &c, Eorum lateribus (quæ propterea sunt series Secundanorum, Tertianorum, quartanorum, Quintanorum, &c.) convenient rationes 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, 1 ad 6, &c. Quia 1, 3, 5, item 1, 4, 7, item 1, 5, 9, item 1, 6, 11, &c. sunt Arithmeticè-proportionales.

PROP. LIII. *Lemma.*

HIs intellectis; patet aditus ad investigationem rationum quas (ad seriem maximæ æqualiũ) habere dicantur ejusmodi series Radicum Quadraticarum, Cubicarum, Biquadraticarum, &c. nume-

numerorum sive quantitatum arithmetice-proportionalium, a puncto vel o inchoatarum; (puta √o, √1, √2, √3, &c. √c o, √c1, √c2, √c3, &c. √qq o, √qq1, √qq2, √qq3, &c.) Quas appello series Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum; &c.

Exsempli gratia. Si exponantur ejusmodi infinita Quadrata Arithmeticè proportionalia, sive juxta seriem Primanorum; quibus in Tabellâ assignatur ratio 1 ad 2: Eorum Lateribus, (hoc est, seriei subsecundanorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{2}$ (sive 2 ad 3;) quia 1, $1\frac{1}{2}$, 2, sunt Arithmetice proportionalia.

Item, si supponantur ejusmodi infiniti Cubi Arithmeticè-proportionales, sive juxta seriem Primanorum; quibus convenit in Tabella, ratio 1 ad 2. Illorum radicibus cubicis, (hoc est seriei subtertianorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{3}$ (vel 3 ad 4:) & harum radicum quadratis, ratio 1 ad $1\frac{2}{3}$ (vel 3 ad 5:) Quia scilicet 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, 2. sunt Arithmeticè-proportionalia; sicut Unitas, radix, quadratum, & Cubus, sunt Geometricè-proportionalia.

Et parimodo, si infinita Biquadrata, Surdesolida, &c. constituta intelligantur juxta seriem Primanorum, quibus convenit ratio 1 ad 2; eorum radicibus Biquadraticis, Surdesolidalibus, &c. convenient rationes 4 ad 5, 5 ad 6, &c. vel 1 ad $1\frac{1}{4}$, 1 ad $1\frac{1}{5}$ &c. quia nempe 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, 2; item 1, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, $1\frac{4}{5}$, 2; &c. sunt Arithmetice-proportionalia. Adeoq; ---

PROP. LIV. *Theorema.*

SI intelligatur series infinita quantitatum, a puncto seu o inchoatarum, & continue crescentium pro ratione Radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c, numerorum Arithmeticè proportionalium; (quam appello seriem *Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c.*) Erit totius ratio ad seriem totidem maxime æqualium, ea

quæ ſequitur in hac Tabella: Nempe

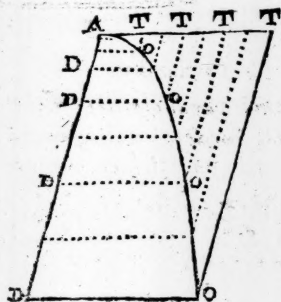
Subſecundanorum	$\frac{2}{3}$	Vel ut 1 ad	$1\frac{1}{2}$.
Subtertianorum	$\frac{3}{4}$		$1\frac{1}{3}$.
Subquartanorum	$\frac{4}{5}$		$1\frac{1}{4}$.
Subquintanorum	$\frac{5}{6}$		$1\frac{1}{5}$.
Subſextanorum	$\frac{6}{7}$		$1\frac{1}{6}$.
Subſeptimanorum	$\frac{7}{8}$		$1\frac{1}{7}$.
Suboctavanorum	$\frac{8}{9}$		$1\frac{1}{8}$.
Subnonanorum	$\frac{9}{10}$		$1\frac{1}{9}$.
Subdecimanorum	$\frac{10}{11}$		$1\frac{1}{10}$.

Et ſic deinceps.

Patet ex præcedente.

PROP. LV. *Coroll.*

ERgo, *Planum ſemi-parabolæ (vel etiam Parabolæ) eſt ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 2 ad 3. (Et conſequenter ipſius complementum eſt ad idem Parallelogrammum ut 1 ad 3.)*



Eſt enim Planum Semiparabolæ (aut etiam Parabolæ) ſeries infinita ſubſecundanorum (per 8 prop. Con. Sect.) Parallelogrammum autem ſeries totidem maximæ æqualium: Ergo illud ad hoc ut 1 ad $1\frac{1}{2}$ vel ut 2 ad 3. (et, conſequenter, ipſius complementum, nempe Parallelogrammi reſiduum, ut 1 ad 3.)

PROP.

PROP. LVI. *Coroll.*

ITem, *Planum Semi-paraboloidis (vel etiam Paraboloidis) cubicalis, est ad Parallelogrammum circumscriptum, ut* 3 *ad* 4. (*& consequenter, ipsius Complementum, est ad idem Parallelogrammum, ut* 1 *ad* 4.)

Cum enim (per 45. Prop. Con. Sect.) ordinatim-applicatę in Paraboloide cubicali sint in subtriplicata ratione diametrorum (sive distantiarum a vertice) erit planum ex illis omnibus conflatum series subtertianorum; quæ se habet ad seriem totidem maximo æqualium (hoc est, ad Parallelogrammum circumscriptum,) ut 1 ad $1\frac{1}{3}$, sive ut 3 ad 4. (Et consequenter, ipsius complementum, nempe parallelogrammi residuum, est ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 4.)



PROP. LVII. *Corollarium.*

EOdem modo, *Planum Semi-paraboloidis (vel Paraboloidis) Biquadraticalis, Surdesolidalis, aut superioris cujusvis potestatis, ratio ad Parallelogrammum circumscriptum nota erit; puta ut* 4 *ad* 5, 5 *ad* 6, *&c.* (*Et consequenter, ipsorum etiam complementa ad eadem Parallelogramma rationem notam habebunt; puta ut* 1 *ad* 5, 1 *ad* 6. *&c.*)

Sunt enim illa plana series subquartanorum, subquintanorum, &c. ideoque, ad series Æqualium, ut 4 ad 5, 5 ad 6; &c. &, consequenter, eorum complementa (quæ quidem sunt series Quartanorum, Quintanorum, &c.) ut 1 ad 5, 1 ad 6, &c.

SCHOLIUM.

Adeoque & per hanc etiam Tabellam, licet Parabolarum, & Paraboloidium cubicalis, biquadraticalis, aut ſuperioris cujuſlibet poteſtatis, & eorundem etiam Complementorum, aream invenire: quod pollicitus ſum ad Prop. 48. Con. Sect. & ſupra præſtiti ad Prop. 45. hujus.

PROP. LVIII. *Lemma.*

T*Andem, ope ejuſdem Regulæ (prop.* 46.) Si proponatur ejuſmodi ſeries infinita quantitatum, a puncto vel o inchoatarum, & continuè creſcentium, pro ratione Poteſtatis (non ſimplicis tantum cujuſvis, ſed &) compoſitæ: ratio quam habet illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, inveſtigatur. Puta. Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. Subſecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. aut etiam Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Vel Radices Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c. Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c; aut Subſecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. Aut etiam quocunq; modo compoſitæ.

Exſempli gratia. Cum ſeries ſubtertianorum (puta √c o, √c 1, √c 2, √c 3, &c.) rationem habeant (ad ſeriem totidem maximæ æqualium) eam quæ eſt 3 ad 4, ſeu 1 ad $1\frac{1}{3}$: Eorum quadrata (quę eadem ſunt & radices cubicę ſecundanorum, puta √c o, √c 1, √c 4, √c 9, &c.) rationem habebunt ad totidem maxime æqualia, eam quæ eſt 1 ad $1\frac{2}{3}$, vel 3 ad 5. quia nempe 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, vel $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, ſunt arithmetice proportionalia.

Pariter, ſeriei ſubquartanorum cubi, vel (quod tantundem eſt) radices biquadraticæ ſeriei cuborum vel tertianorum; rationem habebunt ad ſeriem Æqualium, ut 4 ad 7. Cum enim ſeries ſubquartanorum rationem habeat in Tabella 1 ad $1\frac{1}{4}$ vel

4

4 ad 5 : eorum cubi rationem habebunt (ad ſeriem totidem maximo æqualium) ut 1 ad $1\frac{3}{4}$, vel 4 ad 7. Quia nempe 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, vel $\frac{4}{4}$ $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, ſunt Arithmetice-proportionalia; ſicut Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, &c. ſunt Geometrice-proportionalia.

Et ſimiliter in poteſtatibus magis adhuc compoſitis; puta Radices quadraticæ cuborũ ſeriei ſubquintanorum. Nam ſeriei ſubquintanorũ convenit ratio 1 ad $1\frac{1}{5}$ vel 5 ad 6; ergo eorum cubis conveniet ratio 1 ad $1\frac{3}{5}$ vel 5 ad 8 (quia nempe 1, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, vel $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$, ſunt Arithmetice-proportionalia;) & eorũ Radicibus quadratis, ratio 1 ad $1\frac{3}{10}$, vel 10 ad 13, (quia nempe $1\frac{3}{10}$ eſt medium Arithmeticum inter 1 ad $1\frac{3}{5}$, ſunt enim 1, $1\frac{3}{10}$, $1\frac{6}{10} = 1\frac{3}{5}$ vel $\frac{10}{10}$, $\frac{13}{10}$, $\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$, Arithmetice proportionalia,) Vel etiam cum radices quadraticæ ſubquintanorum ſint ſeries ſubdecimanorum; cui convenit ratio 10 ad 11 vel 1 ad $1\frac{1}{10}$: Harum radicum Cubi rationem habebunt eam quæ eſt 10 ad 13 vel 1 ad $1\frac{3}{10}$: Quia 1, $1\frac{1}{10}$, $1\frac{2}{10}$, $1\frac{3}{10}$ vel $\frac{10}{49}$, $\frac{11}{49}$, $\frac{12}{19}$, $\frac{13}{19}$, ſunt quatuor termini arithmetice proportionales.

Atque eodem modo, in ſeriebus aliarum Poteſtatum utcunque compoſitarum, earundem ratio ad ſeriem æqualium inveſtigabitur. Adeoque ---

PROP. LIX. *Theorema.*

SI intelligatur ſeries infinita quantitatum, a puncto ſeu o inchoatarum, & continuè creſcentium pro ratione poteſtatis cujuſvis ex ſimplicibus (prop. 44 & 54 memoratis) compoſitæ; erit totius ratio ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ea quæ ſequitur in hac Tabella. Nempe

Radices

	Seriei: Æqualium	Primanorum	Secundanorum	Tertianorum	Quartanorum	Quintanorum	Sextanorum	Septimanorum	Octavanorum	Nonanorum	Decimanorum
	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	1/11
Radices: Quadraticæ	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	2/9	2/10	2/11	2/12
Cubicæ	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	3/9	3/10	3/11	3/12	3/13
Biquadrat.	4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	4/9	4/10	4/11	4/12	4/13	4/14
Surdesolidæ	5/5	5/6	5/7	5/8	5/9	5/10	5/11	5/12	5/13	5/14	5/15
Sextanæ	6/6	6/7	6/8	6/9	6/10	6/11	6/12	6/13	6/14	6/15	6/16
Septimanæ	7/7	7/8	7/9	7/10	7/11	7/12	7/13	7/14	7/15	7/16	7/17
Octavanæ	8/8	8/9	8/10	8/11	8/12	8/13	8/14	8/15	8/16	8/17	8/18
Nonanæ	9/9	9/10	9/11	9/12	9/13	9/14	9/15	9/16	9/17	9/18	9/19
Decimanæ	10/10	10/11	10/12	10/13	10/14	10/15	10/16	10/17	10/18	10/19	10/20

Et sic deinceps. (columns)

Et sic deinceps. (rows)

PROP. LX. *Corollarium.*

ERgo, *Conoidea & Pyramidoidea Parabolica & Paraboloidica; quæ nempe Parabolæ, Paraboloidi cubicali, biquadraticali, surdesolidali, &c. aptantur; sunt ad Cylindrum et prisma circumscriptum (vel aliud quodvis super æquali base æquè altum) ut* 2 *ad* 4, 3 *ad* 5, 4 *ad* 6, 5 *ad* 7. *&c.*

Cum

Cum enim Parabolæ, & Paraboloidum illorum plana sint series rectarum in ratione subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, subquintanorum, &c. sive ut radices quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, surdesolidæ, &c. Primanorum: Conoidea & Paraboloidea sic aptata, sunt series planorum in duplicata ratione istarum rectarum; & propterea, ut radices quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, surdesolidæ &c. secundanorum: quibus in tabella assignantur rationes illæ 2 ad 4, 3 ad 5, 4 ad 6, 5 ad 7, &c.

PROP. LXI. *Corollarium.*

Sed & hinc innotescit methodus quadrandi non modò Parabolam sed & Paraboloidea omnia (eorúmq; complementa) non modò ea quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem simplicis alicujus potestatis, (de quibus dictum est prop. 55, 56, 57, item prop. 23, 45.) Sed & juxta rationem potestatis cujusvis ex simplicibus compositæ. Puta; si ordinatim-applicatæ sint in diametrorum ratione duplicatæ subtriplicata, subquintuplicata, subseptuplicata, &c. vel triplicatæ subquadruplicata, subquintuplicata, &c. rationem habebunt ad Parallelogrammum circumscriptum eam quam habent 3 ad 5, 5 ad 7, 7 ad 9, &c. 4 ad 7, 5 ad 8, &c. Et eorum complementa (quorum ordinatim-applicatæ erunt propterea in suarum diametrorum ratione subduplicatæ triplicata, quintuplicata, septuplicata, &c. item subtriplicatæ quadruplicata, quintuplicata, &c.) rationem habebunt 2 ad 5, 2 ad 7, 2 ad 9, &c. 3 ad 7, 3 ad 8, &c. Et similiter in cæteris: juxta tenorem præcedentis Tabellæ, prop. 59.

Nam si ordinatim applicatæ sint in diametrorum suarum ratione duplicatæ subtriplicata, erit planum illud series rectarum quę se habent ad invicem ut quadrata radicum cubicarum (vel radices cubicæ quadratorum) numerorum arithmetice

proportionalium sive ut radices cubicæ secundanorum; quibus in Tabellâ convenit ratio 3 ad 5.

Et hujus complementum ordinatim-applicatas habebit in diametrorum suarum ratione subduplicatæ triplicata (quod tali argumento probabitur, quo usus sum ad Prop. 23.) & propterea planum illud erit series radicum quadraticarum cuborum sive Tertianorum; quibus assignatur in Tabellâ ratio 2 ad 5.

Et pariter de aliis judicandum.

SCHOLIUM.

Atque hoc pacto aliæ adhuc figuræ curvilineæ (præter eas quas innuimus ad Prop. 45, & 57.) ad æquales rectilineas reducantur. Nempe omnia cujuscunque generis Paraboloidea, & eorum complementa.

PROP. LXII. *Corollarium.*

Atq; exinde etiam patet methodus ad æqualia Cylindros & prismata reducendi Conoidea & Pyramidoidea omnia Parabolica & Paraboloidica (non modo qualia memorantur prop. 60, ubi planorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem simplicis alicujus potestatis, sed &) etiam quæ aptantur ejusmodi Paraboloidibus (qualia memorantur prop. 61.) quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem seriei alicujus potestatis compositæ.

Exempli gratia. Si paraboloidis ordinatim applicatæ sint in diametrorum ratione subtriplicatæ-duplicata (vel subtriplicata duplicatæ) erit istius planum rectarum series infinita in ratione radicum cubicarum secundanorum: & propterea Conoides vel Pyramidoides erit series totidem planorum in earundem rectarum ratione duplicata, ideoque radicum cubicarum Quartanorum; & propterea (juxta tabellam Prop. 59.) ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, ut 3 ad 7.

Item, si Paraboloidis ordinatim applicatæ sint in diametrorum ratione subquadruplicatæ triplicata; erunt plana Conoidis

dis vel Pyramidoidis, in earundem diametrorum ratione subquadruplicatæ-sextuplicata (sive, quod tantundem valet, subduplicatæ triplicata,) ideoque Conoides vel Pyramidoides illud (ex istorum planorum serie conflatum) ad cylindrum vel Prisma circum-scriptum, ut 4 ad 10, vel 2 ad 5.

Et pariter in aliis juxta tenorem Tabellæ.

PROP. LXIII. *Corollarium.*

Eodem modo; Eorundem Semi-Paraboloidum complementis aptata Conoidea & Pyramidoidea, ad æqualia Cylindros & Prismata reducuntur.

Exsempli gratia. Si semi-paraboloidis complementum ordinatim applicatas habeat in diametrorum ratione subduplicatæ triplicata, erit planum illud rectarum series infinita in ratione radicum quadraticarum cuborum sive Tertianorum, & proinde Conoides vel Pyramidoides huic aptatum, erit series totidem Planorum in earundem rectarum ratione duplicata, adeoque in diametrorum ratione subduplicatæ-sextuplicata (seu, quod tantundem valet, in diametrorum ratione triplicata:) erit igitur ad cylindrum vel Prisma circumscriptum, ut 2 ad 8, vel 1 ad 4.

Item, si semi paraboloidis complementum ordinatim-applicatas habeat in diametrorum ratione subtriplicatæ-quadruplicatâ; erunt plana Conoidis vel Pyramidoidis in earundem diametrorum ratione subtriplicatæ-octuplicata: & propterea ut radices cubicæ octavanorum; adeoque Conoides vel Pyramidoides illud, ad cylindrum vel Prisma circumscriptum, ut 3 ad 11.

Et pariter de aliis judicandum est juxta Tabellam præmissam.

SCHOLIUM.

Docuimus igitur, quo modo Parabolæ & Paraboliodea omnia cujuscunque generis, & eorum complementa, ad Parallelogramma: Et eorundem Conoidea & Pyramidoidea ad cylindros & Prismata; reduci possunt. Adeoque infinita Proble-

mata solvimus quæ nemo (quantum scio) antea suscepit, nedum exsequutus est.

Placet autem adhuc ex Tabellis omnibus præcedentibus (Prop. 44, 54, 59.) hoc universale Theorema colligere, (quod quidem convenit cum Regula Prop. 46.) Nempe ---

PROP. LXIV. *Theorema.*

SI intelligatur series infinita quantitatum, a puncto seu o inchoatarum, & continue crescentium pro ratione cujuscunq; potestatis, sive simplicis sive ex simplicibus compositæ; erit totius ratio, ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ est Unitatis ad Indicem istius potestatis unitate auctum.

Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. (sive potestatis Lateralis, Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c.) indicem statuo 1, 2, 3, 4, &c. subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, &c. (sive Radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c. primanorum, sive arithmetice proportionalium) indicem statuo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. Potestatis cujusvis compositæ indicem facio ex componentium indicibus compositum: Puta secundanorum cubi (vel Tertianorum quadrata) indicem habent $6 = 2 \times 3$: subsecundanorum Radices cubicæ (vel subtertianorũ Radices Quadraticæ) indicem habent $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$: Cubi Radicum quadraticarum Quintanorum, indicem habebunt $\frac{15}{2} = 3 \times \frac{1}{2} \times 5$.

Rationes autem his potestatibus (in Tabellis) assignatæ, sunt hujusmodi. Puta, Primanis, Secundanis, Tertianis, Quartanis, &c. 1 ad 2, 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, &c. hoc est 1 ad 1 + 1, 1 ad 2 + 1, 1 ad 3 + 1, 1 ad 4 + 1, &c. Subsecundanis, Subtertianis, subquartanis, &c. 2 ad 3, 3 ad 4, 4 ad 5 &c. vel 1 ad $1\frac{1}{2}$, 1 ad $1\frac{1}{3}$, 1 ad $1\frac{1}{4}$, &c. hoc est 1 ad $\frac{1}{2}$ + 1, 1 ad $\frac{1}{3}$ + 1, 1 ad $\frac{1}{4}$ + 1, &c. Tertianorum Quadratis (sive sextanis) 1 ad 7, hoc est, 1 ad 6 + 1. Tertianorum Radicibus Quadraticis 2 ad 5, sive 1 ad $\frac{5}{2}$, hoc est 1 ad $\frac{3}{2}$ + 1. Subsecundanorum radicibus cubicis (sive subsextanis) 6 ad 7, sive 1 ad $\frac{7}{6}$, hoc est 1 ad $\frac{1}{6}$ + 1. Cubis radicum quadraticarum quintanorum, (sive Quindecimano-

rum

rum radicibus quadraticis,) 2 ad 17, sive 1 ad $\frac{17}{2}$, hoc est 1 ad $\frac{15}{2}+1$. (Et sic de cæteris.) quod affirmat Theorema. Sin Index supponatur irrationalis, puta $\surd 3$; erit ratio, ut 1 ad $1+\surd 3$, &c.

PROP. LXV. *Theorema.*

EX cognita ratione quam habet quælibet series ad seriem Æqualium, cognoscitur ratio quam habet quælibet ad quamlibet aliam.

Exsempli gratiâ. Parabola ad triangulum, (hoc est series subsecundanorum ad seriem primanorum,) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{2}$ vel ut 4 ad 3. Semi-parabolæ complementum ad Triangulum, vel etiam Conus ad Conoides Parabolicum, (hoc est series secundanorum ad seriem primanorum,) ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut 2 ad 3. Semi-parabola ad suum complementum, (hoc est series subsecundanorum ad seriem secundanorum,) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{3}$, vel ut 2 ad 1. Sic Parabola ad paraboloides cubicale, ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, vel ut 8 ad 9: Et Conoides illius ad Conoides hujus, ut $\frac{2}{4}$ ad $\frac{3}{5}$, vel ut 5 ad 6. Paraboloides cubicale ad Biquadraticale, ut $\frac{3}{4}$ ad $\frac{4}{5}$, vel ut 15 ad 16: Et Conoides illius ad conoides hujus, ut $\frac{3}{5}$ ad $\frac{4}{6}$ vel ut 9, ad 10. Et sic in aliis.

Intellige; si, easdem vel æquales habeant & bases & altitudines (aut saltem reciprocatas:) Nam si diversas habeant vel bases vel altitudines vel utraque, ratio seriei unius ad aliam, componitur ex rationibus & basium & altitudinum & ea quæ est serierum propria. Puta si parabolæ basis B altitudo A, Trianguli basis β altitudo α; erit parabola illa ad Triangulum, ut $\frac{2}{3}$ AB ad $\frac{1}{2}$ $\alpha\beta$, vel 4 AB ad 3 $\alpha\beta$ & pariter in cæteris. Item, si Trianguli basis B, altitudo A; & Parabolæ basis β, altitudo α, erit Parabola ad Triangulum ut $\frac{2}{3}\alpha\beta$ ad $\frac{1}{2}$ AB, vel $4\alpha\beta$ ad 3 AB.



Demonstratio patet. Cum enim Parabola A B sit $\frac{2}{3}$ Parallelogrammi A B; & Triangulum $\alpha\beta$ $\frac{1}{2}$ Parallelogrammi $\alpha\beta$ erit illa ad hoc ut $\frac{2}{3}$ A B ad $\frac{1}{2}\alpha\beta$. Et similiter aliis.

PROP. LXVI. *Theorema.*

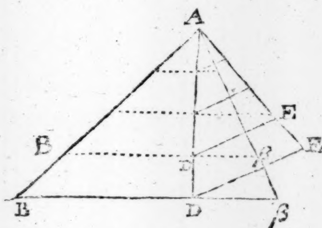
EX cognita quantitate ſeriei alicujus integræ, cognoſcitur quantitas ejuſdem obtruncatæ.

Puta, Si A B Triangulum ſit $\frac{1}{2}$ A B Parrallelogrammi; & $\alpha\ \beta$ Triangulum, $\frac{1}{2}\ \alpha\ \beta$ Parallelogrammi: erit reſiduum Trapezium, $\frac{1}{2}$ A B $-\frac{1}{2}\ \alpha\ \beta$ Item A B Parabola $\frac{2}{3}$ A B parallelogrammi circumſcripti: & $\alpha\ \beta$ parabola $\frac{2}{3}\ \alpha\ \beta$ parallelogrammi circumſcripti: erit reſiduum, $\frac{2}{3}$ A B $-\frac{2}{3}\ \alpha\ \beta$. Et pariter in aliis.

Fig. Preced.

PROP LXVII. *Corollarium.*

SI Triangulum rectis quotlibet ſecetur baſi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, (portiones æquè altas abſcindentibus;) abſciſſa Triangula (verticem inter & rectas ſecantes) ſunt ut 1, 4, 9, 16, &c. *numeri quadrati. Spacia vero rectis illis interjecta, ut* 1, 3, 5, 7, &c. *Arithmetice-proportionales.*

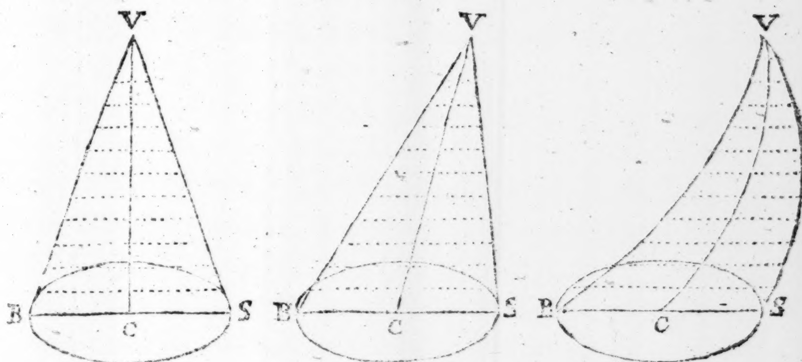


Quia Triangulorum abſciſſorum tam altitudines quam baſes ſunt arithmetice proportionales: ergo plana in duplicata ratione Arithmetice proportionalium, ſive ut numeri quadrati, 1, 4, 9, 16, &c. Et propterea, ſpacia interjecta, $1, 3 = 4 - 1, 5 = 9 - 4, 7 = 16 - 9$ &c.

PROP. LXVIII. *Corollarium.*

SI conus planis quotlibet ſecetur baſi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, (portiones æquè-altas abſcin-

abscindentibus,) abscissi coni (verticem inter & plana secantia) sunt ut 1, 8, 27, 64, *&c. numeri cubici. Portiones vero interjectæ, ut* 1, 7, 19, 37, *&c. differentiæ numerorum cubicorum. (& similiter in Pyramide.)*

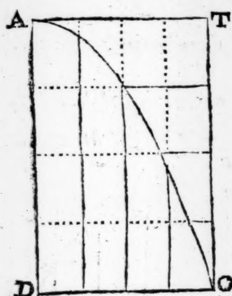


Quia cum conorum abscissorum altitudines sint arithmetice proportionales & propterea etiam basium diametri; adeoq; bases in earundem ratione duplicata; erit ratio conorum (quæ ex altitudinum & basium rationibus componitur) in ratione altitudinum triplicata, seu ut 1, 8, 27, 64, &c. Et propterea portiones interjectæ, ut 1, 7 = 8 − 1, 19 = 27 − 8, 37 = 64 − 27. &c.

PROP. LXIX. *Corollarium.*

SI *Parabola rectis quotlibet secetur (basi parallelis & æqualiter ab invicem remotis, portiones æquèaltas abscindentibus,) erunt abscissæ parabolæ (verticem inter & rectas secantes,) ut* $1\sqrt{1}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{4}$, *&c. vel ut* $\sqrt{1}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{64}$, *&c. radices*

qua-

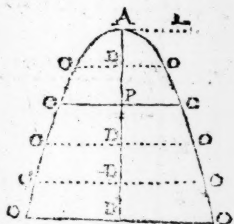


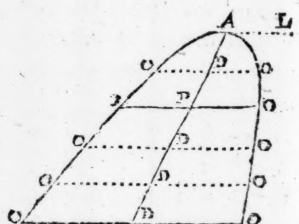
quadraticæ numerorum cubicorum. Spacia vero interjecta, ut earum radicum differentiæ.

Sunt enim bases (quippe Ordinatim-applicatæ in parabolâ) in altitudinum ratione subduplicata.

PROP. LXX. *Corollarium.*

SI Conoides Parabolicum planis quotlibet secetur (basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, portiones abscindentibus æquè-altas,) erunt conoidea sic abscissa (verticem inter & plana secantia) ut 1, 4, 9, 16, &c. numeri quadrati: Et portiones interjectæ, ut 1, 3, 5, 7, &c. Arithmetice-proportionales. (Et similiter in Pyramidoide.)



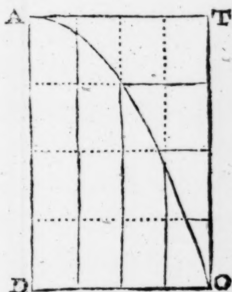


Nempe, ut de Triangulo dictum est Prop. 67. sunt enim conoidum abecissorum bases in ratione duplicata semidiametrorum hoc est ordinatim-applicatarum in parabola; & propterea, altitudinibus proportionales.

PROP.

PROP. LXXI. *Corollarium.*

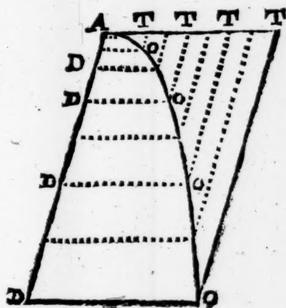
SI complementum semiparabolæ rectis quotlibet secetur (complementi basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, portiones abscindentibus æquè-altas,) erunt complementa sic abscissa (verticem inter & rectas secantes,) ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri cubici: Et portiones interjectæ, ut 1, 7, 19, 37, &c. numerorum cubicorum differentiæ.



Nempe ut supra de Cono dictum est, Prop.68. sunt enim bases, hoc est, complementorum ordinatim applicatæ, in altitudinum ratione duplicatâ.

PROP. LXXII. *Corollarium.*

SI Conoides etiam *semiparabolæ complemento aptatum, planis quotlibet secetur (basi parallelis, & ab invicem æqualiter remotis, portiones abscindentibus æquè-altas,) erunt abscissa conoidea (verticem inter & plana secantia) ut 1, 32, 243, 1024, &c. numeri surdesolidi: Et portiones interjectæ, ut 1, 31, 211, 781, &c. numerorum surdesolidorum differentiæ. (Et similiter in Pyramidoide.)*



Sunt enim baſes conoidum abſciſſorum, in duplicata ratione ſemidiametrorũ ſuarum, ideoque in quadruplicata ratione altitudinum, (ſunt enim ipſæ ſemidiametri baſiũ, ſeu ordinatim-applicatæ in ſemiparabolæ complemento, in duplicata ratione altitudinum.) Et propterea figuræ ſolidæ abſciſſæ, in altitudinum ratione quintuplicata; quippe quæ componitur ex rationibus baſium & altitudinum.

SCHOLIUM.

Et ſimiliter de aliis ejuſmodi figuris (ſive planis ſive ſolidis) eo modis ſectis, judicandum erit: reſpectu ſemper habito ad gradum ſeu poteſtatem illius ſerici quo pertinent.

PROP. LXXIII. *Theorema.*

SI duæ quælibet ſeries (aut etiam plures) invicem reſpective-multiplicentur (nempe primus terminus unius in primum alterius, ſecundus in ſecundum, &c.) prodibit ejuſmodi alia ſeries; quæ indicem habebit ex multiplicatarum indicibus aggregatum; rationem autem, ad ſeriem terminorum ipſius maximo æqualium, eam quam Tabellæ præcedentes (vel etiam Propoſitio 64) indicabunt.

Exempli gratia. Si ſeries quadratorum vel ſecundanorum (cujus index 2) reſpective multiplicetur in ſeriem cuborum vel Tertianorum (cujus index 3,) prodibit ſeries Quintanorum (cujus index $5 = 2 + 3$:) quæ propterea rationem habebit, ad ſeriem maximo Æqualium, eam quam habet 1 ad $6 = 5 + 1$. Puta ſi reſpective multiplicetur

Series ſecundanorum	$0a$,	$1a$,	$4a$,	$9a$,	$16a$,	&c.
in ſeriem Tertianorum	$0b$,	$1b$,	$8b$,	$27b$,	$64b$,	&c.
prodibit ſeries quint.	$0ab$,	$1ab$,	$32ab$,	$243ab$,	$1024ab$,	&c.

Item, ſi ſeries ſecundanorum (cujus index 2) reſpective multiplicetur in ſeriem ſubtertianorum (cujus index $\frac{1}{3}$,) erit producta ſeries, Radices cubicæ ſeptimanorum (cujus index eſt

est $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$;) quæ est ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad $\frac{10}{3} = \frac{7}{3} + 1$, vel ut 3 ad 10. Puta si respective multiplicetur

Series $0a$, $1a$, $4a$, $9a$, &c.
in seriem $\sqrt{^3}\,0b$, $\sqrt{^3}\,1b$, $\sqrt{^3}\,2b$, $\sqrt{^3}\,3b$, &c.

hoc est series $\sqrt{^3}\,0a^3$, $\sqrt{^3}\,1a^3$, $\sqrt{^3}\,64a^3$, $\sqrt{^3}\,729a^3$, &c.
in seriem $\sqrt{^3}\,0b$, $\sqrt{^3}\,1b$, $\sqrt{^3}\,2b$, $\sqrt{^3}\,3b$, &c.
prodibit series
$\sqrt{^3}\,0a^3b$, $\sqrt{^3}\,1a^3b$, $\sqrt{^3}\,128a^3b$, $\sqrt{^3}\,2187a^3b$, &c.

Item, si series subsecundanorum (cujus index $\frac{1}{2}$) respective multiplicetur in seriem subquintanorum (cujus index $\frac{1}{5}$,) erit producta series Radices-Decimanæ septimanorum, (cujus index $\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$:) & propterea rationem habebit, ad seriem maximæ æqualium, eam quam habet 1 ad $\frac{17}{10} = \frac{7}{10} + 1$, vel 10 ad 17. Puta si respective multiplicetur.

Series $\sqrt{^2}\,0a$, $\sqrt{^2}\,1a$, $\sqrt{^2}\,2a$, $\sqrt{^2}\,3a$, &c.
in seriem $\sqrt{^5}\,0b$, $\sqrt{^5}\,1b$, $\sqrt{^5}\,2b$, $\sqrt{^5}\,3b$, &c.
hoc est, series
$\sqrt{^{10}}\,0a^5$, $\sqrt{^{10}}\,1a^5$, $\sqrt{^{10}}\,32a^5$, $\sqrt{^{10}}\,243a^5$, &c.
in seriem $\sqrt{^{10}}\,0b^2$, $\sqrt{^{10}}\,1b^2$, $\sqrt{^{10}}\,4b^2$, $\sqrt{^{10}}\,9b^2$, &c.
prodibit series
$\sqrt{^{10}}\,0a^5b^2$, $\sqrt{^{10}}\,1a^5b^2$, $\sqrt{^{10}}\,128a^5b^2$, $\sqrt{^{10}}\,2187a^5b^2$, &c.

Et similiter in aliis ejusmodi multiplicationibus continget.

PROP. LXXIV. *Corollarium.*

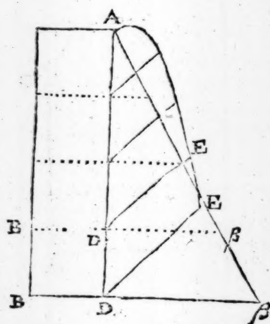
IDeoq; *Ubi Aggregatum Indicum serierum invicem respective-multiplicatarum idem est, ibi et idem erit Index seriei productæ.*

Exsempli gratia. Si series tertianorum in seriem Tertianorum, vel series secundanorum in seriem Quartanorum, vel series Primanorum in seriem Quintanorum, vel series Æqualium in seriem sextanorum, respective multiplicetur; Prodibit series sextanorum. Quia nempe in singulis

aggregatum indicum est 6, (nam $3+3=2+4=1+5=0+6=6$.) Et similiter in aliis.

PROP. LXXV. *Corollarium.*

SI ADB Parallelogrammi rectæ omnes DB, in Dβ rectas Trianguli ADβ (æque-alti) respective ducantur; rectangula producta erunt series primanorum, (qualia sunt plana cunei Parabolici, prop. 11. Con. Sect.) pro quibus si substituantur totidem Quadrata (vel quævis aliæ figuræ planæ similes) illis æqualia, constituetur Pyramidoides Parabolicum: Et eorum Quadratorum (vel figurarum similium) latera, vel mediæ proportionales inter rectas sic multiplicatas, DE, constituent Parabolam, vel Semiparabolam.



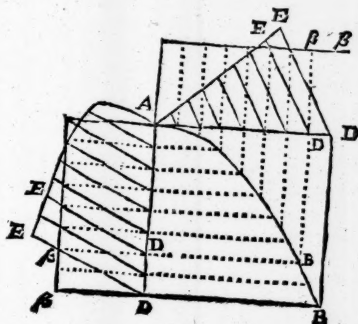
(Intellige, si plana illa, vel mediæ proportionales, quæ sic emergunt, supponantur ad rectam aliquam ita ordinatim-posita ut figurarum constituendarum natura postulat. Quod & deinceps aliquoties intelligendum erit.)

Nam, cum rectæ Parallelogrammi, sint series Æqualium (cujus index 0;) & rectæ Trianguli, series primanorum, (cujus index 1;) producetur, multiplicando, series item primanorum (quia $0+1=1$,) qualia sunt plana cunei Parabolici, & Pyramidoidis Parabolici, (per Prop. 9, 11. Con. Sect.) & mediæ proportionales (seu latera similium planorum) erunt series subsecundanorum (quippe ut Radices quadraticæ Primanorum) quales sunt parabolarum rectæ per Prop. 8. Con. Sect.

PROP.

PROP. LXXVI. *Coroll.*

SI ADβ Parallelogrammi rectæ βD in rectas DB semiparabolæ æquè-altæ ADB respectivè ducantur, rectangula producta erunt series subsecundanorum; & mediæ proportionales, series subquartanorum (quales sunt rectæ Paraboloidis Biquadratici DE.)



Hoc est, series Æqualium (cujus index 0) in seriem subsecundanorum (cujus index $\frac{1}{2}$) respective ducta efficiet seriem item subsecundanorum (quia $\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$) & mediæ proportionales (quippe subsecundanorum radices quadraticæ) erunt series subquartanorum.

PROP. LXXVII. *Coroll.*

SI ADβ Parallelogrammi rectæ Dβ in rectas DB Complementi Semiparabolæ respectivè ducantur; rectangula producta erunt series secundanorum: mediæ autem proportionales, series primanorum (Triangulum constituentium, ADE.)

Nempe, series Æqualium in seriem secundanorum sic ducta, dat seriem etiam secundanorum (quia $0 + 2 = 2$) eorumque radices quadraticæ sunt series primanorum.

PROP.

PROP. LXXVIII. *Corollarium.*

SI Trianguli rectæ DB respectivè ducantur in rectas semiparabolæ Dβ, rectangula producta erunt series radicum quadraticarum Tertianorum, & mediæ proportionales, radices Biquadraticæ Tertianorum, DE.

Nempe, series primanorum in seriem subsecundanorum sic ducta, dabit seriem radicum quadraticarum Tertianorum (quia $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$) quarum radices quadraticæ, sunt radices biquadraticæ Tertianorum.

PROP. LXXIX. *Corollarium.*

SI Trianguli rectæ DB respective ducantur in rectas Complementi semiparabolæ Dβ; producta rectangula sunt series Tertianorum (*quia* $1 + 2 = 3$.) *Et mediæ proportionales, radices quadraticæ Tertianorum. DE.*

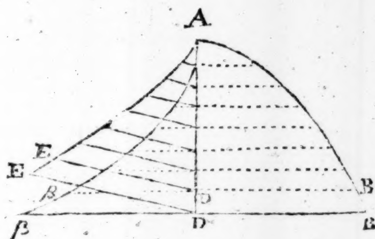
Demonstratur ut præcedentes.

PROP. LXXX. *Corollarium.*

SI rectæ complementi semiparabolæ in rectas semiparabolæ respective ducantur; rectangula producta erunt series radicum quadraticarum Quintanorum (*quia*

2 +

$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$;) *& mediæ proportionales, series radicum*



biquadraticarum Quintanorum. Ut patet.

SCHOLIUM.

Et pari modo de figuris sive planis sive solidis, quæ ex ejusmodi multiplicatione provenient, judicandum erit. Ut si trianguli unius rectæ in rectas Trianguli alterius (sive similis sive dissimilis, modo æque-alti) respective ducantur, fiet Pyramis; mediæ vero proportionales constituent etiam Triangulum. Semiparabolæ unius rectæ in rectas alterius respective ductæ, efficient Pyramidoides Parabolicum; mediæ autem proportionales semi parabolam. Et sic de cæteris.

PROP. LXXXI. *Theorema.*

SI unius Seriei termini omnes per terminos alterius Seriei respectivè dividantur, quotientes erunt series alia, cujus index reperitur subducendo indicem seriei Dividentis ex indice seriei divisæ, quod restat enim est index seriei divisione provenientis, sive Quotientis: Ratio autem quam habitura est series sic producta, ad seriem totidem terminorum ipsius maximo æqualium, ea erit quam Tabellæ præcedentes (vel propositio 64) indicant.

Exsempli gratia. Si series Biquadratorum vel quartanorum

norum (cujus index 4) dividatur per seriem cuborum vel Tertianorum (cujus index 3) quotientes erunt series lateralium seu Primanorum, cujus index 1 = 4 − 3.

Tert.	Quart.	Prim.
0c)	0qq	(0l
1c)	1qq	(1l
8c)	16qq	(2l
27c)	81qq	(3l
&c.	&c.	&c.

Si series tertianorũ dividatur per seriem Primanorum proveniet series secundanorum, cujus index 2 = 3 − 1. Et si series secundanorum per seriem secundanorum dividatur, proveniet series æqualium, cujus index 0 = 2 − 2. Et sic de cæteris.

Prim.)	Tert.	(Secund
0l)	0c	(0q
1l)	1c	(1q
2l)	8c	(4q
3l)	27c	(9q
	&c.	

Demonstratio patet ex Prop. 73. Quia nempe series Tertianorum in seriem primanorum respective ducta efficiet seriem Quartanorum. Et series primanorum in seriem secundanorum sic ducta efficiet seriem tertianorum. Et series secundanorum in seriem Æqualium sic ducta, producet seriem secundanorum. Et sic in reliquis omnibus. quod enim multiplicatione conficitur, id Divisione resolvitur.

Sec.	Sec.	Æqual.
0q)	0q	(1
1q)	1q	(1
4q)	4q	(1
9q)	9q	(1
	&c.	

PROP. LXXXII. *Corollarium.*

IDeoq; , *ubi idem est graduum sive indicum excessus seriei Dividendæ supra seriem Dividentis , idem erit seriei Quotientum index.*

Exsempli gratia. Si series sextanorum per seriem quartanorum, vel series quintanorum per seriem Tertianorum, vel series Quartanorum per seriem Secundanorum, vel series Tertianorum, per seriem Primanorum dividatur; proveniet series Secundanorum. quia nempe in singulis series Divisa seriem Dividentem duobus gradibus superat; est enim 6 − 4 = 5 − 3 = 4 − 2 = 3 − 1 = 2 − 0 = 2) Ideoque per præced.) idem seriei provenientis Index. Et pariter in aliis.

PROP.

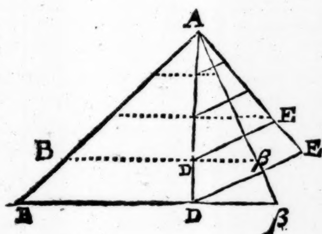
PROP. LXXXIII. *Coroll.*

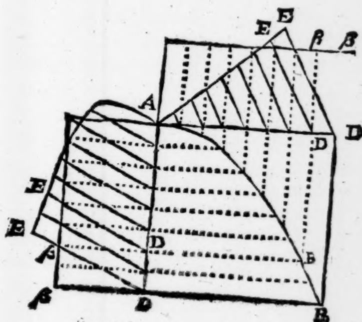
S*I Pyramis* (*series nempe Secundanorum*) *ad Triangulum* (*æquè-altum*) *respectivè applicetur* (*nempe plana illius ad Rectas hujus*) *prodibit Triangulum;* (*quia nempe* $2 - 1 = 1$.) *Si vero applicetur ad complementum semi-parabolæ, prodibit Parallelogrammum;* (*quia* $2 - 2 = 0$.) *Si ad semiparabolam, planum prodiens erit series Radicum quadraticarum Tertianorum;* (*quia* $2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.) *Si ad seriem Æqualium, prodibit complementum semiparabolæ;* (*quia* $2 - 0 = 2$.) *Et sic in aliis.*

Patet ex Prop. 81.

PROP. LXXXIV. *Coroll.*

VEL, *si respectivis rectis Trianguli primi ADB & secundi ADE, sumantur tertiæ proportionales; prodibit Triangulum tertium ADβ: Si respectivis rectis complementi semiparabolæ ADB, & Trianguli*





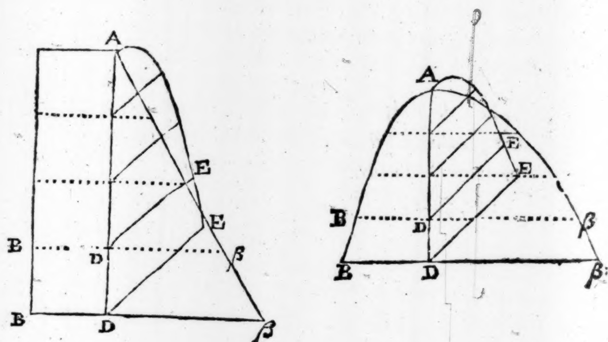
ADE, prodibit parallelogrammum ADβ: Si vero Parallelo-

rallelogrammi ADβ & Trianguli ADE, prodibit complementum semiparabolæ ADB.

Sequitur ex præcedente. Quadrata enim rectarum in Triangulo constituunt Pyramidem. Et similiter in reliquis. Ostenditur autem pars prima in figura priori; secunda & tertia in posteriori.

PROP. LXXXV. *Corollarium.*

SI *Pyramidoides Parabolicum (series nempe Primanorum) ad Triangulum (æquè-altum) respectivè applicetur: prodibit Parallelogrammum; (quia* $1 - 1 = 0.$) *Si ad parallelogrammum, prodibit Trian-*



gulum; (quia $1 - 0 = 1.$) *Si ad semiparabolam, prodibit semiparabola; (quia* $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$) *Si ad semi-paraboloides cubicale, planum prodiens constabit ex secundanorum radicibus cubicis; (quia* $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$) *Et pariter in aliis ejusmodi applicationibus.*

Patet ex Prop. 81.

PROP.

PROP. LXXXVI. *Corollarium.*

SImiliter. *Si respectivis rectis Trianguli ADβ, & semiparabolæ ADE, sumantur tertiæ proportionales, prodibit Parallelogrammum ADE: si respectivis rectis Parallelogrammi ADB, & semiparabolæ ADE, prodibit Triangulum ADβ: si respectivis rectis semiparabolæ primæ ADB, & secundæ ADE, prodibit semiparabola tertia ADβ: & sic in aliis.*

Sequitur ex præcedente. quadrata enim rectarum in semiparabola, constituent Pyramidoides Parabolicum. Ostenditur, in fig. præced.

SCHOLIUM.

Et pari modo de aliis figurarum solidarum ad Planas applicationibus respectivis judicium fiet. Sufficit paucas exsempli causa indicasse, ad quarum imitationem fieri possunt innumeræ aliæ.

PROP. LXXXVII. *Theorema.*

SI proponatur series qualibet prædictarum per aliam superioris gradus seu potestatis dividenda, nulla jam memoratarum series prodire poterit, (cum index potestatis superioris ex indice potestatis inferioris, major quippe ex minore, auferri non possit:) sed aliusmodi plane series, cujus nempe termini sunt reciprocè proportionales homologis terminis alterius seriei, quæ indicem habet æqualem excessui indicis seriei dividentis supra indicem seriei divisæ.

Series autem sic provenientes, series *Reciprocæ* appellentur, habeantq; Indices negativos.

Exsempli gratia. Si series Secundanorum dividenda sit per seriem Tertianorum, vel series Primanorum, per seriem secundanorum, vel series Æqualium per seriem Primanorum, (ubi seri-

es dividens est uno gradu superior serie dividenda, adeoque index seriei dividentis unitate major quam index seriei divisæ, puta $3-2=2-1=1-0=1$:) termini seriei oriundæ erunt reciproce-proportionales homologis terminis seriei primanorum Puta si respective dividatur

series	$0a^2$,	$1a^2$,	$4a^2$,	$9a^2$,	$16a^2$,	&c.
per seriem	$0a^3$,	$1a^3$,	$8a^3$,	$27a^3$,	$64a^3$,	&c.
vel series	$0a$,	$1a$,	$2a$,	$3a$,	$4a$,	&c.
per seriem	$0a^2$,	$1a^2$,	$4a^2$,	$9a^2$,	$16a^2$,	&c.
vel series	1,	1,	1,	1,	1,	&c.
per seriem	$0a$,	$1a$,	$2a$,	$3a$,	$4a$,	&c.

prodibit series $\frac{1}{0a}$, $\frac{1}{1a}$, $\frac{1}{2a}$, $\frac{1}{3a}$, $\frac{1}{4a}$, &c.

cujus seriei termini sunt reciproce proportionales homologis terminis seriei primanorum $\frac{0a}{1}$, $\frac{1a}{1}$, $\frac{2a}{1}$, $\frac{3a}{1}$, $\frac{4a}{1}$, &c.

ut patet. Nempe $\frac{1}{2a}.\frac{1}{3a}::\frac{3a}{1}.\frac{2a}{1}$. Et sic ubique.

Eodem modo si series primanorum dividenda sit per seriem tertianorum; vel (quod tantundem valet) series Æqualium per seriem Secundanorum; erit series proveniens seriei secundanorum reciproce-proportionalis. puta

$\frac{1}{0a}$, $\frac{1}{1a}$, $\frac{1}{4a}$, $\frac{1}{9a}$, $\frac{1}{16a}$, &c.

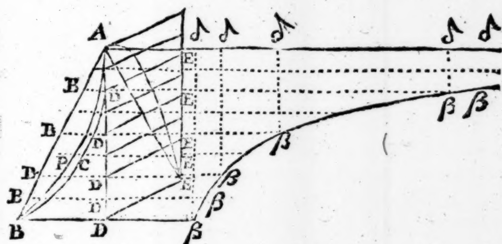
Et pari modo in omnibus ejusmodi divisionibus continget.

PROP. LXXXVIII. *Coroll.*

Si infinita plana (parallela) Parallelepipedi, ad totidem rectas Trianguli (æquè-alti) applicentur; (vel si respectivis rectis Trianguli, & Parallelogrammi, sumantur tertiæ proportionales;) series rectarum provenientium erit reciproca seriei Primanorum, quæ quidem rectæ

rectæ sunt suis a vertice distantiis (vel, si placet, diametris interceptis,) reciproce-proportionales.

Esto enim Parallelepipedum, cujus infinita plana æquentur quadratis totidem rectarum Parallelogrammi ADE, quæ si applicentur ad rectas Trianguli ADB, prodibunt rectæ (re-



ctis trianguli & Parallelogrammi tertiæ proportionales) figuram ADβ mixtam constituentes, quæ reciproce proportionales erunt tam homologis rectis Trianguli (quia nempe cum illis constituunt rectangula æqualia) quam Diametris interceptis, seu distantiis a vertice, quæ (propter similia Triangula abscissa) sunt illis trianguli rectis proportionales.

PROP. LXXXIX. *Coroll.*

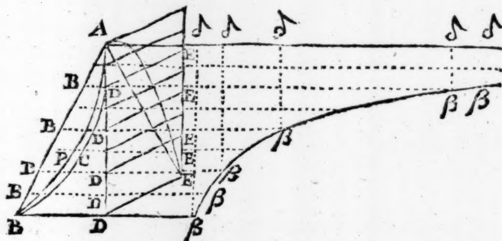
Idem continget, si Plana Pyramidis (quadratis rectarum Trianguli ADE æqualia) applicentur ad totidem Rectas Complementi Semiparaboloidis Cubicalis ADEC.

Patet ex Prop. 87. Nam (ut in Prop. præced.) series primanorum ex quibus conflatur Triangulum, est uno gradu superior, quam series Æqualium, ex quibus constat Parallelepipedum: Sic (in hac Prop) series Tertianorum in complemento semiparaboloidis cubicalis est in uno gradu superior quam series secundanorum ex quibus constat Pyramis. Utrobique igitur provenit series seriei Primanorum reciproca.

PROP.

PROP. XC. *Corollarium.*

Idem continget, si Plana Pyramidoidis Parabolici (hoc est, series Primanorum,) æqualia quadratis rectarum semiparabolæ ADE respective applicentur ad rectas complementi semiparabolæ ADEP. (Seriem nempe Secundanorum.)



Nam & hic index ſeriei dividentis unitate ſuperat indicem ſeriei dividendæ.

PROP. XCI. *Corollarium.*

Figura plana ex ſeriè rectarum Primanis reciproce proportionalium conſtanda, eſt interminabilis. Quod & ſimiliter verum eſt de omnibus ſeriebus Reciprocis.

Cum enim primus terminus in ſerie Primanorum ſit o, primus terminus in ſerie reciproca erit ∞ vel infinitus: (ſicut, in diviſione, ſi diviſo ſit o, quotiens erit infinitus.) adeoq; recta A δ, & curva ββ, non niſi poſt infinitam diſtantiam (hoc eſt, nunquam,) concurrent.

Pari ratione neque concurrent (niſi poſt infinitam diſtantiam) eadem curva ββ & recta AD (quantumvis utraq; continuetur) non prius enim evaneſcet diſtantia Dβ quam facta fuerit infinita recta DB & propterea .....

PROP.

PROP. XCII. *Corollarium.*

Curva ββ duas habet Asymptotas rectas Aδ, AD. Quod & de aliis ejusmodi Curvis rectarum, series reciprocas terminantibus, verum est.

Nempe ita perpetuo propius accedunt ad curvam rectæ, ut tandem earum distantia sit quavis assignabili minor, (ut ex dictis facile est probatu,) neque tamen unquam concurrent, ut jam ostensum est. Atque idem de aliis ejusmodi curvis pariter ostendi poterit.

PROP. XCIII. *Corollarium.*

Rectæ (Dβ, Dβ, &c.) Primanis reciprocè proportionales ab infinitâ ($A\delta = \infty$) continue decrescunt, (eadem ratione qua respective rectæ DE, DE, in serie primanorum a puncto $A = 0$ continue crescunt,) donec pervenitur ad minimam, (sicut in serie primanorum pervenitur ad maximam.) Quod verum est & in aliis seriebus reciprocis.

Patet, propter proportionem reciprocam.

PROP. XCIV. *Corollarium.*

In Figura ADββ, (ex primanorum reciprocis) Parallelogramma inscripta AIβ, AIβ, &c. sunt invicem æqualia.

Habent enim bases & altitudines reciprocas per Prop. 88.

PROP. XCV. *Corollarium.*

Et propterea, *Ipsa curva ββ est Hyperbola; cujus centrum A, Asymptotæ AD, Aδ.*

Per Prop. 12. lib. 2. Apollonii.

PROP.

PROP. XCVI. *Corollarium.*

SI chorda musica AD varie dividatur in punctis D D, &c. sonos edet proportionales rectis D β, D β, &c.

In Fig. præced. Nam (per principia musica) eadem chorda (æquabilis & æqualiter tensa) sonos edit longitudinibus reciproce proportionales. Ideoque si chordæ sint ut A D, A D, &c. soni erunt ut D β, D β, &c. per Prop. 88.

PROP. XCVII. *Coroll.*

SI plana Parallelepipedi (quippe series æqualium) æqualia quadratis rectarum Parallelogrammi ADE ad respectivas rectas Complementi Semiparabolæ ADB (seriem scil. secundanorum) applicentur; prodibit series rectarum secundanis reciprocè proportionalium: Ex quibus si supponatur conflari figura plana ADβ, erit ea interminabilis; & curva illas terminans duas habebit Asymptotas rectas AD, Aδ.



Probatur eodem modo quo propositiones aliquot præcedentes de serie reciproca seriei Primanorum.

PROP. XCVIII. *Coroll.*

IDem continget, si plana pyramidis sic applicentur ad rectas complementi semi-paraboloidis Biquadraticalis;

vel

vel plana pyramidoidis parabolici ad rectas complementi paraboloidis cubicalis.

Nam & istic index seriei dividentis binario superat indicem seriei dividendæ.

PROP. XCIX. *Corollarium.*

IN *ejusmodi serie secundaris reciprocâ, rectæ D β, d β, &c. sunt in reciprocæ rationis Diametrorum (vel distantiarum a vertice) ratione duplicata, (sive ut dAq DAq, &c.)*

Quia nempe reciproce-proportionales sunt rectis D B, d B, &c. quæ sunt in diametrorum A D, A d &c. rationis directæ ratione duplicata. Puta

dAq. DAq :: dB. DB :: Dβ. dβ. Ergo $\frac{dAq}{DAq} = \frac{D\beta}{d\beta}$.

PROP. C. *Corollarium.*

IN *Figura plana (ADββ) ex serie rectarum secundanis reciprocarum conflata, inscripta parallelogramma (ADβ, Adβ,) sunt interceptis diametris (DA, dA,) reciproce proportionalia.*

Sunt enim (per 23. e 6) ut DA × Dβ ad dA × dβ. Est autē per præced.) $d\beta = \frac{DAq}{dAq} D\beta$: Et $dA \times d\beta = \frac{DAq}{dA} D\beta$.

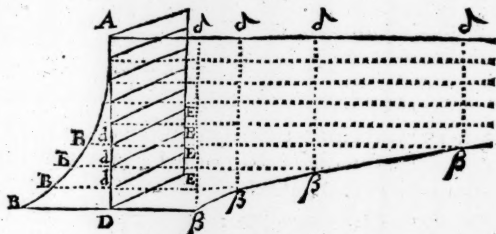
Ergo & DA × Dβ. dA × dβ = $\frac{DAq}{dA}$ Dβ :: dA × DA × Dβ. DAq × Dβ :: dA. DA.

PROP. CI. *Corollarium.*

SI *verò figura plana (ADββ) sit ex serie rectarum Tertianis reciprocarum conflata; (quæ nempe sint rectis complementi paraboloidis cubicalis ADB, & Parallelogrammi*

 grammi

grammi ADE, tertiæ proportionales;) erunt rectæ illæ (Dβ, dβ, &c.) in reciprocæ rationis Diametrorum (DA, dA, &c.) ratione triplicata (scil. ut dAc, DAc, &c.) Et Parallelogramma inscripta ADβ, Adβ, &c.) in reciprocæ rationis diametrorum ratione duplicatâ. (sive ut dAq, DAq, &c.)



Est enim (ex constructione) $D\beta \,.\, d\beta :: dB \,.\, DB :: dAc \,.\, DAc$. Et propterea etiam $d\beta = \frac{DAc}{dAc} D\beta$. Ergo Parallelogramma $AD\beta \,.\, Ad\beta :: DA \times D\beta \,.\, dA \times d\beta = \frac{dA \times DAc}{dAc} D\beta = \frac{DAc}{dAq} D\beta :: dAq \times DA \times D\beta \,.\, DAc \times D\beta :: dAq \,.\, DAq$. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Atque eodem modo de aliis ejusmodi figuris planis ex qualibet rectarum *serie reciproca* conflatis judicandum erit; ut & de Parallelogrammis (sive rectangulis sive obliquangulis, prout situs figuræ postulat,) ipsis inscriptis.

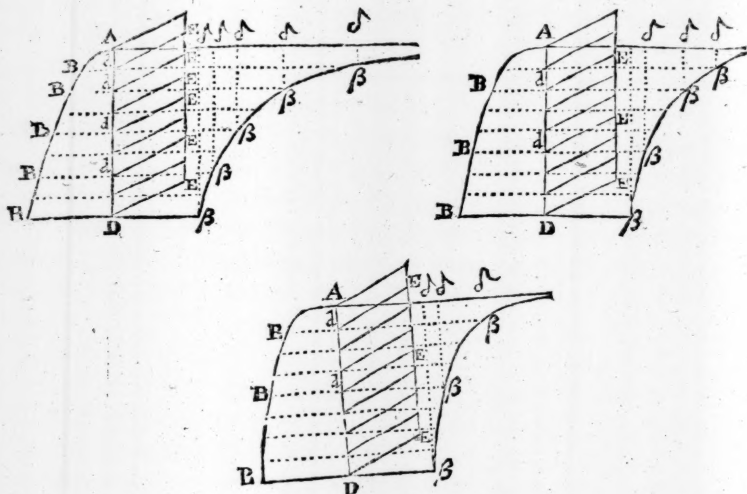
Quod ad Aream autem attinet istarum figurarum ex seriebus reciprocis constantium; quærenda est illa eodem fere modo quo supra in seriebus directis. Ubi autem series directæ indices habent 1, 2, 3, &c. ut quæ supra seriem Æqualium tot gradibus ascendunt; habebunt hæ quidem (illis reciprocæ) suos indices contrarios negativos −1, −2, −3, &c. tanquam tot gradibus infra seriem Æqualium descendentes. Prout autem illæ ab 0 ciphra vel Nihilo continuo crescunt, hæ contra ab ∞ Infinito continue decrescunt; atque ut illic terminus maxi-

mus, hic minimus, seriem claudit: (quæ tamen & pro arbitrio continuanda supponitur, quousque libet illic crescendo, hic decrescendo) Adeoque, ut illic figura Circumscripta (parallelogrammum puta vel prisma) sive series totidem terminorum Maximo æqualium; hic, figura Inscripta, sive series totidem terminorum Minimo æqualium, habenda est pro communi mensura ad quam facienda est comparatio; utrobique ad illum terminum respectu habito qui seriem claudit.

Neque interim mirum cuiquam videatur (ut ut fortassis inexspectatum) si figuræ interminatæ rationem ad datam aliam terminatam inquiram. Quamvis enim hujusmodi figuræ A D β (ut ut ex parte D β ad libitum terminatæ, uti modo in his scholiis dictum est) supponantur ex parte δ β in infinitum continuatæ (per Prop. 91.) non tamen propterea vel nullam vel semper infinitam rationem habituræ sunt ad datam figuram terminatam, puta ad parallelogrammũm æque altum super eadem basi D β descriptum Quod eo quidem facilius assensum obtinere posse videatur, cũ id ipsum in una quadã figura solida (quam *Hyperbolicam acutam infinitam* vocat) jam ostenderit Torricellius. Sed neque semper rationem habituræ sunt finitam, sed aliquando vel infinitam, vel etiam (si id sine solœcismo dici possit) majorem quam infinitam. Nempe, si eadem ratione abbreviantur rectæ δ β, qua prolongantur recte D β, erit ea ratio infinita; ubi nempe prolongatio unius æquipollet abbreviationi alterius, (& propterea figuræ infinitæ continuatæ ratio ex utraque composita æquipollet figuræ alicui æquabiliter in infinitum continuandæ:) Si vero minori ratione abbreviantur rectæ δ β quam prolongentur D β, futura est ratio plusquam infinita; tunc enim prolongatio harum præpollet (seu plusquam æquipollet) illarum abbreviationi. Si autem majori ratione decrescunt rectæ δ β quam crescunt rectæ D β, præpollet earum decrementum incremento harum; adeoq; futura est ratio finita, minor siquidem quam infinita. (Et quidem secundum hoc *κριτήριον*, non modo de figuris hisce quas jam tractamus, sed de aliis etiam quibusvis interminabilibus, sive planis sive solidis, ad terminatas aliquas comparatis, judicandum erit: quæ, credo, speculatio non videbitur injucunda.) Quæ autem futura est in singulis ratio, sequentibus aliquot propositionibus (regulam Prop. 64 secuti) indicabimus.

PROP. CII. *Theorema.*

SI figura ADβ verticem habeat Aα infinitum, & perpetuò decreſcat ad baſin uſq; Dβ, ſecundum ſeriem aliquam reciprocam ſeriei cuilibet directæ (earum puta quæ prop. 59. memorantur,) quæ indicem habeat minorem quam 1; habebit illa ad parallelogrammum ſuper eâdem baſi æque-altum rationem finitam; eam nempe quam habet 1 ad iſtius ſeriei reciprocæ indicem unitate auctum.



Exſempli gratia; ſunto ſeries directæ ſubſecundanorum, ſubtertianorum, ſubquartanorum, &c. quarum, indices $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. (unitate minores;) ſeries his reciprocæ indices habebunt $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (Nam ſi ſupponatur ſeries æqualium, cujus index 0, per illas dividi, series diviſione

divisione provenientes habebunt indices $0 - \frac{1}{2}$, $0 - \frac{1}{3}$, $0 - \frac{1}{4}$, &c. hoc est $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (per Prop. 81.) quibus si (juxta regulam Prop. 64.) addatur 1, fient $-\frac{1}{2}+1$, $-\frac{1}{3}+1$, $-\frac{1}{4}+1$, &c. hoc est, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. & propterea ratio totius figuræ ad parallelogrammum inscriptum (super eadem base æquealtum) ut 1 ad $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. vel ut 2 ad 1, 3 ad 2, 4 ad 3, &c.

Et pari modo, si sumatur series reciproca seriei radicum cubicarum secundanorum, vel radicum biquadraticarum secundanorum, aut tertianorum, vel radicum surdesolidarum secundanorum, tertianorum, aut quartanorum, (quarum indices sunt $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$,) aut alii cuivis seriei, cujus index est unitate minor. Quia reciprocarum serierum indices negativi his contrarii (puta $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, &c.) additione unitatis fient affirmativi, adeoque ratio quam habet 1 ad indices illos sic auctos, erit ratio finita; quippe numeri positivi ad positivum.

PROP. CIII. *Theorema.*

SI vero ejusmodi Figura ADFβ sic continuo decrescat juxta seriem quæ sit reciproca directæ indicem habenti unitati æqualem (nempe seriei Primanorum;) habebit illa ad Parallelogrammum inscriptum rationem infinitam: eam nempe quæ est 1 ad 0.

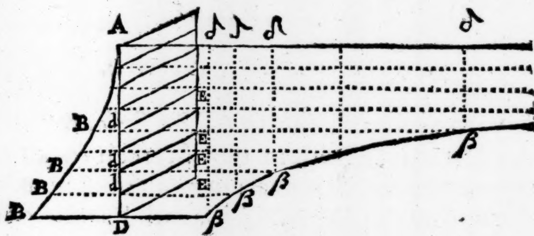
Cum enim series primanorum indicem habeat 1, series hinc reciproca indicem habebit -1, ideoque

per

per Prop. 64.) ratio proveniens erit 1 ad $-1+1$. hoc est 1 ad 0.

PROP. CIV. *Theorema.*

SI deniq; ejusmodi Figura AD$\beta\beta$, sic continuo decrescat juxta seriem quæ sit reciproca directæ indicem habenti unitate majorem; habebit illa ad Parallelogrammum inscriptum rationem plusquam infinitam: qualem nempe habere supponatur numerus positivus ad numerum negativum, sive minorem nihilo. Nempe eam, quam habet 1 ad indicem unitate auctum.



Puta cum indices seriei secundanorum, Tertianorum Quartanorum, &c. sint 2, 3, 4, &c. (unitate majores,) indices serierum illis reciprocarum erunt -2, -3, -4, &c. qui quamvis unitate augeantur (juxta Prop. 64.) manebunt tamen negativi, puta $-2+1=-1$, $-3+1=-2$, $-4+1=-3$, &c. & propterea ratio quam habet 1 ad indices illos sic auctos, puta 1 ad -1, 1 ad -2, 1 ad -3, &c. major erit quam infinita, sive 1 ad 0; quia nempe rationum consequentes sunt minores quam 0.

Atque idem continget, si sumatur reciproca seriei radicum quadraticarum Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum &c. (cujus indices sunt $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c.) vel indicum cubicarum Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. (cujus indi-

ces

ces [illegible] $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, &c) aut cuivis denique ſeriei cujus index eſt unitate major. Ut patet.

PROP. CV. *Theorema.*

SI ejuſmodi figura ADδβ verticem habens Aδ infinitum & baſin Dβ determinatam, rationem habeat ad inſcriptum parallelogrammum ADβδ majorem quam infinitam: eadem figura ADδβ verticem habens AD infinitum & baſin δβ determinatam, rationem habebit ad inſcriptum Parallelogrammum AδβD minorem quam infinitam (finitam nempe:) Et contra, ſi ſitu illo conſiderata rationem habeat minorem quam infinitam; ſitu hoc habebit rationem majorem quam infinitam: Si deniq; in ſitu uno rationem habeat ſimpliciter infinitam (puta neq; majorem neq; minorem) etiam & ſitu altero habebit rationem ſimpliciter infinitam.

Nam verbi gratia, in ſerie ſecundanis reciproca, cum ſint (per Prop. 99.) rectæ Dβ, Dβ, in diametrorum AD, AD, ratione reciprocæ duplicata; erunt e converſo rectæ AD, AD, hoc eſt δβ, δβ in rectarum Dβ, Dβ, hoc eſt, diametrorum Aδ, Aδ, ratione reciprocæ-ſubduplicata; adeoque ipſæ δβ, δβ, &c. ſunt ſeries ſecundanis reciproca. Et contra. Atque (cum idem etiam in aliis ejuſmodi ſeriebus contingat) patet propoſitum per Prop. 102, & 104.

In ſerie vero primanis reciproca; cum (per Prop. 88.) rectæ Dβ, Dβ, ſint diametris AD, AD, reciproce proportionales; erunt etiam rectæ δβ, δβ diametris ſuis Aδ, Aδ, reciproce proportionales, ipſæque δβ, δβ, ſeries item primanis reciproca. Conſtat ergo propoſitum per Prop. 103.

PROP. CVI. *Theorema.*

SI ſeries aliqua reciproca per ſeriem aliam (ſive reciprocam ſive directam) multiplicetur aut dividatur

tur, vel etiam aliam multiplicet aut dividat; eadem leges observandæ sunt quæ in seriebus directis prop. 73 & 81.

Exsempli gratia. Si series secundanis reciproca (puta $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, &c.) cujus index -2 respective multiplicetur in seriem Tertianis reciprocam (puta $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, &c.) cujus index est -3; prodibit series subquintanis reciproca $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{243}$, &c.) cujus index $-5 = -2 -3$ ut patet.

Item si series tertianis reciproca ($\frac{1}{1}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, &c.) cujus index -3; respective multiplicetur per seriem secundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit series $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{9}{27}$, &c. hoc est $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. Primanis reciproca, cujus index $-1 = -3 + 2$

Item si series subsecundanis reciproca ($\frac{1}{\sqrt{1}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ &c.) cujus index $-\frac{1}{2}$; respective multiplicetur in seriem secundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit series ($\frac{1}{\sqrt{1}}$, $\frac{4}{\sqrt{2}}$, $\frac{9}{\sqrt{3}}$, &c. vel $\frac{1}{1}\sqrt{1}$, $\frac{4}{2}\sqrt{2}$, $\frac{9}{3}\sqrt{3}$, &c. vel $1\sqrt{1}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{3}$, &c. vel $\sqrt{1}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$, &c.) radicum quadraticarum cuborũ seu tertianorum, cujus index $\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 2$.

Item, si series secundanis reciproca, cujus index -2, dividat seriem Primanis reciprocam, cujus index -1; prodibit series Primanorum, cujus index $1 = -1 + 2$, nempe -1 minus -2.

$\frac{1}{1}$)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1} = 1$
$\frac{1}{4}$)	$\frac{1}{2}$	($\frac{4}{2} = 2$
$\frac{1}{9}$)	$\frac{1}{3}$	($\frac{9}{3} = 3$
	&c.	

Item si series Primanis reciproca, cujus index -1, dividat seriem secundanis reciprocam, cujus index -2; prodibit series Primanis reciproca, cujus index $-1 = -2 + 1$; nempe -2 minus -1.

$\frac{1}{1}$)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$
$\frac{1}{2}$)	$\frac{1}{4}$	($\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$)	$\frac{1}{9}$	($\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
	&c.	

Item, si series primanis reciproca, cujus index -1, dividat seriem secundanorum, cujus index 2; prodibit series tertianorum, cujus index $3 = 2 + 1$, nempe 2 minus -1.

$\frac{1}{1}$)	1	(1
$\frac{1}{2}$)	4	(8
$\frac{1}{3}$)	9	(27
	&c.	

Item

Item si seriem Primanis reciprocam, cujus index -1, dividat series secundanorum, cujus index 2; prodibit series Tertianis reciproca, cujus index $-3 = -1 - 2$, nempe -1 minus 2.

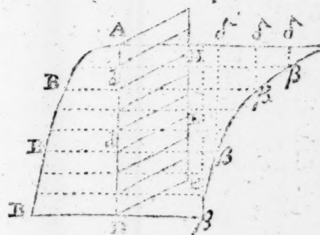
1)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1}$
4)	$\frac{1}{2}$	($\frac{1}{8}$
9)	$\frac{1}{3}$	($\frac{1}{27}$
	&c.	

Atque idem continget, in aliis quibusvis hujusmodi seriebus. Adeoque constat propositum.

PROP. CVII. *Corollarium.*

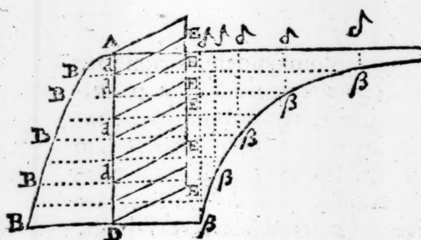
ET propterea; *Si ad hujusmodi figuram* $AD\beta\delta$, *(ex una parte in infinitum productam) juxta quamcunq; seriem reciprocam, aptetur (eo modo quo 9 Prop. Con. Sect. & alibi supra ostendi;) Pyramidoides vel Conoides inversum, (seu potius Calatoides:) habebit illud ad cylindrum aut Prisma inscriptum (super eadem basi æquè-altum) eam rationem, sive finitam sive infinitam sive plusquam infinitam, quam præcedentia Theoremata docebunt.*

Puta, si planum sit rectarum series subtertianis reciproca, cujus index $-\frac{1}{3}$, adeoque ratio quam habet ad parallelogrammum inscriptum (per Prop. 64, & 102) ut 1 ad $\frac{2}{3}$ $(= -\frac{1}{3} + 1)$ hoc est, ut 3 ad 2: solidum ex totidem planis constans in rectarum earum ratione duplicata, erit series Quadratis subtertianorum reciproca, cujus index (per Prop. 106.) $-\frac{2}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$, vel $-\frac{1}{3}$ plus $-\frac{1}{3}$, & ratio illius solidi ad inscriptum cylindrum vel Prisma (super eadem basi æque-altum) ut 1 ad $\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + 1$, vel ut 3 ad 1 utrobique ratio finita. per Prop 64 & 102.



Si planum, sit series subsecundanis reciproca, cujus index $-\frac{1}{2}$, adeoque ratio ipsius ad Parallelogrammum inscriptum

ut 1 ad $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1$, vel ut 2 ad 1: (per Prop. 101, 102,) ſolidum ex totidem planis in rectarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries quadratis ſubſecundanorum reciproca, vel (quod tantundem valet) ſeries Primanis reciproca, cujus index $-\frac{2}{2}$, vel $-1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$. Ideoque ratio hujus ſolidi ad cylindrum vel Priſma (ſuper eadem baſi æquealtum) ut 1 ad $-1 + 1 = 0$. (per Prop. 103.) Nempe illic ratio finita, hic ſimpliciter infinita.



Si planum ſit ſeries Quadratis ſubtertianorum reciproca, cujus index $-\frac{2}{3}$, ejuſque ratio ad Parallelogrammum inſcriptum ut 1 ad $\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + 1$, vel ut 3 ad 1. (per Prop. 102.) ſolidum ex planis totidem in rectarum illarum duplicata ratione conſtans, erit ſeries Biquadratis Subtertianorum reciproca, cujus index $-\frac{4}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$, & propterea ratio ipſius ad inſcriptum cylindrum vel Priſma ſuper eadem baſi æque-altum, ut 1 ad $-\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$, vel ut 3 ad -1 (per Prop. 104.) Nempe illic ratio finita, hîc pluſquam infinita.

Si planum ſit ſeries primanis reciproca, cujus index -1, adeoque ratio quam habet ad Parallelogrammum inſcriptum 1 ad $-1 + 1 = 0$: (per Prop 103) Solidum ex planis in rectarum illarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries Quadratis Primanorum (hoc eſt, ſecundanis) reciproca, cujus index -2, & propterea ratio ipſius ad Cylindrum vel priſma ſuper eadem baſi æque altum, ut 1 ad $-2 + 1$, ſeu ut 1 ad -1. (per P. 104) Nēpe illic ratio ſimpliciter infinita, hic pluſquā infinita.

Si planum ſit ſeries ſecundanis reciproca, cujus index -2, adeoque ratio quam habet ad parallelogrammum inſcriptum ut 1 ad $-2 + 1 = -1$. Solidum ex totidem planis in rectarum illarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries quadratis ſecundanorum, hoc eſt Quartanis, reciproca, cujus index $-4 = -2 - 2$; ejuſque ratio ad Cylindrum vel Priſma debite

bite inscriptum, ut 1 ad $-4+1=-3$. (per Prop. 104.) Nempe utrobiq; ratio plusquam infinita.

SCHOLIUM.

Atque ita problema illud (ingeniosum quidem, & non paucis mirandum,) quod Torricellius in una figura solida præstitit, (puta, *Solido Hyperbolico acuto* in infinitum continuato, æquale cylindrum constituere) nos in aliis innumeris figuris tam planis quam solidis (præcedentibus sex propositionibus continuis) præstitimus. Puta, *Figuris innumeris specie differentibus, tam planis quam solidis, interminatis, æquales figuras terminatas* (vel saltem, quod tantundem valet, in cognita ratione constitutas) *exhibere*.

Consultius fortassis esset, (si tantum aucupandæ famæ operam darem,) celata methodo qua huc perventum est, paucas aliquot particulares propositiones (tanquam admirandum quidpiam aut stupendum) demonstrationibus apagogicis ostendisse. quod veteres olim non raro fecisse, plane suspicor; qui illud sæpius sibi videntur proposuisse, ut ipsos alii admirentur potius quam intelligant; saltem ut illis eorum effatis assensum coacti præbeant, potius quam ut genuinam problematis investigationem intelligant. Atque hinc factum esse credo, quod eorum Analytice (quam quidem ipsos habuisse ex multis ipsius, in demõstrationibus eorum non paucis, vestigiis satis liquet) posteros fere penitus latuerit; (exigua enim plane pars illa est quæ apud Diophantum exstat, si ad egregia illa quo ipsi pervenerunt inventa comparetur:) Ut necesse habuerint præsentis ævi mathematici (*Vieta, Oughtredus, Harriotus, Ghetaldus, Cavallerius, Torricellius, Chartesius*, aliique magni viri) vel novam excogitare, vel antiquam saltem (conclamatam plane & penitus ignoratam) de novo resuscitare; quod quidem eo successu præstiterunt, ut nostram nunc dierum Analyticen, veterum istam, tanta superstitione celatam, æquare saltem vel superare potius nullus dubitem.

Verum ergo mallem libere philosophando, fontes ipsos aperire, ut eadem opera possit lector & propositionum demonstrationes & methodum qua istuc pervenerim persentiscere; unde & ipse possit proprio marte ejusmodi alias innumeras investigare, quas ego (ne tædio sim) lubens prætereo, contentus eo digitum intendisse, unde alii alia nostris similia pro libitu depromant.

Licuisset quidem & præmissis multa subjungere, & multa passim interpolare, quæ ex principiis jam traditis facile deduci possent. Verum cum ea, quæ jam tradidi, mihi videantur abunde sufficere, ut & ipsa perspicue satis intelligantur, & perfectam satis *serierum* (tam simplicium quam compositarum & utriusque Reciprocarum) tractationem videantur continere: ad series *Conjunctas* (sive ad Binomiorum sive Apotomarum formam) explicandas, festinandum sentio.

PROP. CVIII. *Theorema.*

SI series Æqualium seriei Primanorum respective mulctetur (puta, si primus terminus hujus a primo illius auferatur, secundus a secundo, &c.) Residua erunt semissis totius: sin ita augeatur; Aggregatorum series erit expositæ seriei Æqualium sesquialtera.

Intellige, si Æqualium & Primanorum terminus ultimus idem sit (vel æqualis) Quod & deinceps aliquoties intelligendum erit: sin fuerint inæquales, non tamen erit difficile rationes provenientes invenire; quod monuisse sufficiat, cum id quilibet suo marte præstare poterit.

Sit verbi gratia terminus Æqualium quilibet & primanorum maximus R; ejusque pars infinite parva dicatur $a = \frac{R}{\infty}$; numerus terminorum omnium (vel figuræ altitudo A:) si Termini.

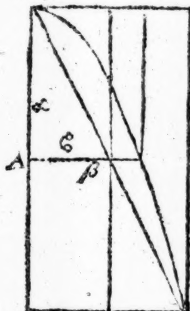
	$R - 0a$	$R + 0a$
	$R - 1a$	$R + 1a$
	$R - 2a$	$R + 2a$
	$R - 3a$	$R + 3a$
	&c.	&c.
continuentur in infinitum usque ad	$R - R$	$R + R$
erit Residuorũ & Aggregatorũ sũma ...	$AR - \frac{1}{2}AR$	$AR + \frac{1}{2}AR$

Nam omniũ Æqualium agregatũ erit AR (ut patet;) Primanorum aggregatum ejusdem semissis $\frac{1}{2}$ AR, per Prop. 2.) Ergo $AR - \frac{1}{2}AR = \frac{1}{2}AR$, & $AR + \frac{1}{2}AR = \frac{3}{2}AR$. Nempe seriei Æqualium (AR) illud est $\frac{1}{2}$, hoc $\frac{3}{2}$: prout affirmatur. Hoc est, erit illud ad seriem æqualium ut $\frac{1}{2}$ ad 1, vel ut 1 ad 2: hoc autem, ut $\frac{3}{2}$ ad 1, vel ut 1 ad $\frac{2}{3}$, vel 3 ad 2.

PROP.

PROP. CIX. *Coroll.*

ERgo, *Si Parallelogrammo auferatur Triangulum (super eâdem vel æquali base æquè-altum) Residuum (quod quidem & ipsum erit Triangulum inversum) erit Parallelogrammi semissis: sin addatur Triangulum, erit aggregatum (nempe Trapezium) sesquialterum.*



Patet ex præcedenti; est enim Parallelogrammum series Æqualium; Triangulum, series Primanorum.

PROP. CX. *Coroll.*

ITem, *Cylindrus Parabolicè excavatus, est pleni semissis. (Quod idem verum est de Prismate analogice excavato.)*

Nempe si ex Cylindro (serie nempe Æqualium) eximatur conoides Parabolicum (super eadem base æque-altum) quod quidem est series primanorum (per Prop. 4, vel 60.) quod reliquum est erit semissis totius per Prop. 108.

Atque idem accidet si Prismati eximatur Pyramidoides Parabolicum.

PROP. CXI. *Theorema.*

SI Series Æqualium mulctetur serie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Residua erunt totius duo Trientes, tres Quadrantes, quatuor Quintantes, &c. Sin ita augeatur, erunt Ag-

gregata ejuſdem Seſquitertium, Seſquiquartum, Seſquiquintum, &c.

$$\text{Nempe ſi Termini}\left\{\begin{array}{lll} R^2 \pm 0a^2 & R^3 \pm 0a^3 & R^4 \pm 0a^4 \\ R^2 \pm 1a^2 & R^3 \pm 1a^3 & R^4 \pm 1a^4 \\ R^2 \pm 4a^2 & R^3 \pm 8a^3 & R^4 \pm 16a^4 \\ R^2 \pm 9a^2 & R^3 \pm 27a^3 & R^4 + 81a^4 \\ \&c & \&c. & \&c. \end{array}\right.$$

continuentur uſq; ad $R^2 \pm R^2$ $R^3 + R^3$ $R^4 + R^4$

erunt ſummæ $A\overline{R^2} \pm \frac{1}{3}A\overline{R^2}.\ A\overline{R^3} \pm \frac{1}{4}A\overline{R^3}.\ A\overline{R^4} \pm \frac{1}{5}A\overline{R^4}$

(per Prop. 44)

Hoc eſt, Reſiduorũ ſumma $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.\ 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.\ 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ &c.

Aggregatorum ſumma $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.\ 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.\ 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ &c.

PROP. CXII. *Coroll.*

Ergo, *ſi Parallelogrammo auferatur complementum Semi-parabolæ, Semi-paraboloidis cubicalis, Biquadraticalis, &c. Reſiduum (puta ſemi-parabola, ſemi-paraboloides cubicale, biquadraticale, &c.) erit* $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, *&c. totius Parallelogrammi: ſin eidem Parallelogrammo ejuſmodi complementum addatur, erit aggregatum* $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$, *&c. Ejuſdem Parallelogrammi.*

Patet ex præcedente.

PROP. CXIII. *Coroll.*

ITem, *Cylindrus Conicè excavatus, (vel Priſma Pyramidicè,) continet integri duos trientes. Et ſimiliter de aliis excavationibus (mutatis mutandis) fiet judicium.*

Patet ex Prop. 111. ſubducta quippe ſerie ſecundanorum, ex ſerie Æqualium.

PROP. CXIV. *Theorema.*

SI Series Æqualium mulctetur serie subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, &c. Residua erunt totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin ita augeatur, erunt Aggregata ejusdem quinq; Trientes, septem Quadrantes, novem Quintantes, &c. vel, duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.

Nēpe si termini.	$\sqrt{R} \pm \sqrt{0a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{0a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{0a}$
	$\sqrt{R} \pm \sqrt{1a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{1a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{1a}$
	$\sqrt{R} \pm \sqrt{2a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{2a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{2a}$
	$\sqrt{R} \pm \sqrt{3a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{3a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{3a}$
	&c.	&c.	&c.
Continuentur ad	$\sqrt{R} \pm \sqrt{R}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{R}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{R}$
Erūt sūmæ (per prop. 54.)	$A\sqrt{R} \pm \frac{2}{3}A\sqrt{R}$.	$A\sqrt[3]{R} \pm \frac{3}{4}A\sqrt[3]{R}$.	$A\sqrt[4]{R} \pm \frac{4}{5}A\sqrt[4]{R}$
Hoc est, Residuorum summa	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$
Aggregatorum summa	$1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$	$1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$

PROP. CXV. *Corollarium.*

ERgo, *Si Parallelogrammo auferatur Parabola, Paraboloides Cubicale, Biquadraticale, &c. Residuum erit totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin addatur, erit Aggregatum Parallelogrammi duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.*

Sequitur ex præced.

PROP.

PROP. CXVI. *Theorema.*

PAri modo judicandum erit in seriebus aliis seriei Æqualium addendis vel subducendis; quarum quantitas innotescit ex prop. 59. vel 64.

Puta si termini	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{0a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{0a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{0a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{1a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{1a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{1a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{8a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{4a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{16a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{27^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{9a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{81a^4}$.
	&c. ad	&c. ad	&c. ad
continuentur ad	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{R^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{R^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{R^4}$.
summa	$A\sqrt{R^3} \pm \frac{2}{5}A\sqrt{R^3}$	$A\sqrt[3]{R^2} \pm \frac{3}{5}A\sqrt[3]{R^2}$	$A\sqrt[3]{R^4} \pm \frac{3}{7}A\sqrt[3]{R^4}$
Hoc est, Residua	$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$	$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$	$1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$
Aggregata	$1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$	$1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$	$1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$

Et similiter (mutatis mutandis) in aliis quibuscunq;.

PROP. CXVII. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Primanorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Placet autem pro notis $1a$, $2a$, $3a$, &c. (in præcedentibus propositionibus usurpatis) jam substituere a, b, c, &c. quo melius operationis processus perspiciatur.

PROP.

Seriei	Quadrata.	Cubi
$R - 0$	$R^2 - 0R + 00$	$R^3 - 0R^2 + 0R - 000$
$R - a$	$R^2 - 2aR + a^2$	$R^3 - 3aR^2 + 3a^2R - a^3$
$R - b$	$R^2 - 2bR + b^2$	$R^3 - 3bR^2 + 3b^2R - b^3$
$R - c$	$R^2 - 2cR + c^2$	$R^3 - 3cR^2 + 3c^2R - c^3$
&c. ad	&c. ad	&c. ad
$R - R$	$R^2 - 2RR + R^2$	$R^3 - 3RR^2 + 3R^2R - R^3$
$AR - \frac{1}{2}AR$	$AR^2 - \frac{2}{2}AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$	$AR^3 - \frac{3}{2}AR^3 + \frac{3}{3}AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$
nēpe $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
vel $\frac{1}{2}$	$\frac{1 \times 2}{2 \times 3}$	$\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4}$

Et ſic deinceps, continuè multiplicando numeros arithmeticè proportionales, (prout poteſtatis gradus poſtulat) ab 1 & 2, unitate continuè creſcentes.

Et quidem nihil aliud ſunt quam totidem ſeries Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. inverſæ.

PROP. CXVIII. *Theorema.*

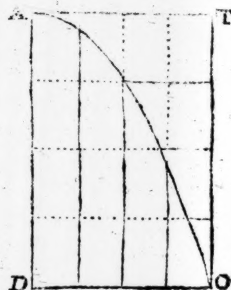
SI ſupponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie ſecundanorum: Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata	Cubi
$R^2 - 00$	$R^4 - 00R^2 + 00$	$R^6 - 00R^4 + 00R^2 - 00$
$R^2 - a^2$	$R^4 - 2a^2R^2 + a^4$	$R^6 - 3a^2R^4 + 3a^4R^2 - a^6$
$R^2 - b^2$	$R^4 - 2b^2R^2 + b^4$	$R^6 - 3b^2R^4 + 3b^4R^2 - b^6$
$R^2 - c^2$	$R^4 - 2c^2R^2 + c4$	$R^6 - 3c^2R^4 + 3c^4R^2 - c^6$
&c. ad	&c. uſq; ad	&c. uſq; ad
$R^2 - R^2$	$R^4 - 2R^2R^2 + R^4$	$R^6 - 3R^2R^4 + 3R^4R^2 - R^6$
ſūma $AR^2 - \frac{1}{3}AR^2$	$AR^4 - \frac{2}{3}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$	$AR^6 - \frac{3}{3}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 - \frac{1}{7}R^6$
nēpe $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$	$1 - \frac{3}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{48}{105}$
vel $\frac{2}{3}$	$\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$	$\frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}$

Et sic deinceps, continue multiplicando numeros arithmetice proportionales (quousque gradus potestatis postulat) a 2 & 3 continue binario crescentes.)

PROP. CXIX. *Corollarium.*

ET propterea, *Conoides* (*vel Pyramidoides*) *semiparabolæ* (*aut etiam Parabolæ*) *circa ipsius ordinatim-applicatam aptatum, erit ad Cylindrum* (*vel Prisma*) *ejusdem basis & altitudinis, ut* 8 *ad* 15.



Nempe ut Quadrata residuorum seriei Æqualium mulctatæ serie secundanorum, (ad totidem maximo æqualium) Nam si volvendo semiparabolam A D O circa ipsius ordinatim-applicatam D O, ut axem (vel etiam alias, ut Prop. 9 Con. Sect. diximus,) formetur conoides (vel Pyramidoides) cujus vertex O: erunt plana illa, Conoides (vel Pyramidoides) constituentia ut Quadrata seriei Æqualium serie secundanorum mulctatæ: (Nam rectæ in semiparabola A D O Diametro A D parallelæ, sunt residuæ Æqualium ablatis secundanis, in complemento AT O repertis, ut patet ex dictis Prop. 23.) Ideoq; ad totidem maximo æqualia (hoc est, Cylindrum vel Prisma,) ut 8 ad 15 per præcedentem.

SCHOLIUM.

Et pari modo de conoidibus vel Pyramidoidibus ad Paraboloidis cujusvis ordinatim applicatam aptatis, judicium fiet, ope sequentium propositionum. Puta in Paraboloide cubicali ratio erit ut 9 ad 14; in Biquadraticali, ut 32 ad 45; in surdesolidali, ut 25 ad 33, &c. ut in tab. Prop. 126.

PROP.

PROP. CXX. *Corollarium.*

Deinde, *Si infinita series Æqualium mulctata serie Primanorum, in eandem seriem Æqualium eâdem serie Primanorum auctam, respectivè ducatur: Rectangulorum (vel Quadratorum aut etiam similium quarumvis figurarum, ipsis æqualium, aut quidem proportionalium) Aggregatum, ad aggregatum totidem maximo Æqualium, rationem habebit cognitam.*

Atq; idem accidet, si Quadrata seriei mulctatæ ducantur in Quadrata seriei auctæ; & Cubi illius in Cubos hujus; & sic deinceps.

Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. 118. Nam

$$\begin{array}{lll} & R - a & Q:R - a: = R^2 - 2aR + a^2 \\ \text{in} & R + a & Q:R + a: = R^2 - 2aR + a^2 \\ \hline \text{facit} & R^2 - a^2 & R^4 - 2a^2R^2 + a^4 \\ & \&c. & \&c. \end{array}$$

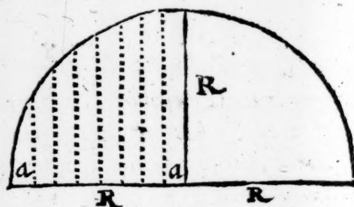
$$\begin{array}{ll} & C:R - a: = R^3 - 3aR^2 + 3a^2R - a^3 \\ \text{in} & C:R + a: = R^3 + 3aR^2 + 3a^2R + a^3 \\ \hline \text{facit} & R^6 - 3a^2R^4 + 3a^4R^2 - a^6 \\ & \&c. \end{array}$$

& sic in singulis terminis cujusvis potestatis; ut multiplicando patebit Prop 121.

PROP. CXXI. *Corollarium.*

Ideoq;, *Circulus ad Quadratum Diametri, (vel etiam Ellipsis qualibet ad Parallelogrammum sibi circumscriptum,) eam habet rationem, quam habent Radices quadraticæ universales Residuorum seriei infinita Æqualium serie Secundanorum mulctatæ, ad seriem illam Æqualium.*

Nam si circuli Radius ponatur R, (cujus Pars infinite parva $\frac{R}{\infty} = a$,) eique insistant Perpendiculares sive sinus recti numero infiniti Quadrantem circuli complentes; erunt illæ perpendiculares mediæ proportionales inter Diametri Segmenta, (ut notum est;) hoc est.



inter	$R+0$,	$R+1a$,	$R+2a$,	$R+3a$,	&c.
&	$R-0$,	$R-1a$,	$R-2a$,	$R-3a$,	&c.
quorū Rectangula,	R^2-00,	R^2-1a^2,	R^2-4a^2,	R^2-9a^2	&c.
Ipsæq; mediæ proportionales	$\sqrt{:R^2-00}$.	$\sqrt{:R^2-1a^2}$.	$\sqrt{:R^2-4a^2}$,	$\sqrt{:R^2-9a^2}$,	&c.

quam igitur rationem habent harum radicum universalium Aggregatum, ad totidem maximæ (Radio scil.) æqualium, eam habet quadrans circuli (ex illis constans) ad quadratum Radii (constans ex his:) Adeoque & circulus integer ad quadratum Diametri. Quod erat ostendendum.

Atque idem de qualibet ellipsi (mutatis mutandis) facile ostendetur; cum ipsius etiam ordinatim applicatæ sint mediis proportionalibus (inter diametri transversæ segmenta) proportionales, & quidem nonnunquam æquales, ut ex conicorum doctrina notum est.

SCHOLIUM.

Ratio autem quam innuit hæc propositio (circuli nempe ad quadratum Diametri) ea est, quam habet Unitas ad numerum intermedium inter 1 & $\frac{1}{2}$ in secunda serie Transversa Tabellæ Prop 127. Quomodo autem invenietur numerus ille (vel alius quivis istius seriei numeris interponendus) deinceps inquirendum erit.

PROP.

PROP. CXXII. *Corollarium.*

ET proinde, *si ſupponamus infinitas rectas ſemiparabolæ cujuſvis, in ejuſdem continuationis æquè-altæ & ſitu inverſo poſitæ rectas, reſpectivè duci; quod provenit ſolidum ex infinitis illis Rectangulis conflatum (aut ex Quadratis quæ rectangulis illis ſint æqualia) erit ad Parallelepipedum ſuper eadem baſe æquè-altum, ut circulus ad Quadratum Diametri. (Et quidem mediæ proportionales erunt in ſubduplicatâ ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel Ellipſi.)*

Semiparabolam quamlibet APO, ſecet recta MO (baſi parallela) in duo ſegmenta æque alta; & Recta MO dicatur $\sqrt{R}$. Erunt reliquæ ordinatim-applicatæ in ſegmento ſuperiori aſcendendo, $\sqrt{:R - a}$. $\sqrt{:R - 2a}$. $\sqrt{:R - 3a}$. &c. Et in ſegmento inferiori deſcendendo, $\sqrt{:R + a}$. $\sqrt{:R + 2a}$. $\sqrt{:R + 3a}$. &c. (propter quadrata ordinatim-applicatarũ in parabola, arithmetice proportionalia) Ideoq; ſi ſupponamus ſemiparabolā ita ſectam ſic in ſe replicari, ut punctum P puncto A congruat, totumq; ſegmentum MPO transferatur in ſitum MAω, (ut ordinatim-applicatæ inferioris ſegmenti ordinatim applicatis ſuperioris inverſe reſpondeant) rectangula, ODo, ODo, &c. Erunt $\sqrt{:R^2 - 0}$. $\sqrt{:R^2 - a^2}$. $\sqrt{:R^2 - 4a^2}$ $\sqrt{:R^2 - 9a^2}$, &c. ut multiplicatione patebit.

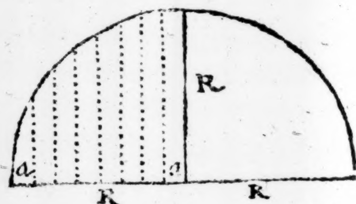
$\sqrt{:R - 0}$.	$\sqrt{:R - a}$.	$\sqrt{:R - 2a}$.	$\sqrt{:R - 3a}$.
$\sqrt{:R + 0}$.	$\sqrt{:R + a}$.	$\sqrt{:R + 2a}$.	$\sqrt{:R + 3a}$.
$\sqrt{:R^2 - 0}$	$\sqrt{:R^2 - a^2}$	$\sqrt{:R^2 - 4a}$	$\sqrt{:R^2 - 9a^2}$ &c.

Horum igitur omnium aggregatum, ad maximum ($\sqrt{:R^2 - o:} = \sqrt{R^2} = R$) toties positum, hoc est, solidum propositum ad Parallelepidum ejusdem basis & altitudinis,) ut circulus ad quadratum Diametri per praeced. Et propterea etiam mediæ proportionales erunt in subduplicata ratione ordinatim applicatarum in circulo vel ellipsi, ut patet.

PROP. CXXIII. *Corollarium.*

ITem, *Sphæræ (vel Sphæroides aut etiam Pyramidoides Ellipticum,) ad cylindrum (vel Prisma) circumscriptum; est ut series infinita Æqualium multata serie secundanorum, ad seriem totidem maximo Æqualium. Hoc est ut 2 ad 3.*

Sequitur ex Prop. 121. Nam si mediæ proportionales inter diametri segmen a, quadrantem circuli (vel ellipseos) complentes, jam fieri supponantur totidem aliorum circulorum invicem parallelorum radii, semissem sphæræ (vel sphæroideos) complentium, (vel similium quorumvis planorum rectæ similiter positæ semipyramidoides ellipticum constituentium,) erunt hi circuli (vel plana) in duplicata ratione Radiorum suorum (sive rectarum similiter positarum:) Hoc est, ut $R^2 - o$. $R^2 - a^2$. $R^2 - 4a^2$. $R^2 - 9a^2$, &c. (sunt enim rectæ illæ $\sqrt{:R^2 - o}$. $\sqrt{:R^2 - a^2}$. $\sqrt{:R^2 - 4a^2}$, $\sqrt{:R^2 - 9a^2}$ &c. per Prop. 121.) Ideoq; horum omnium aggregatum, ad aggregatum omnium maximo æqualium ut 2 ad 3. per Prop. 118.

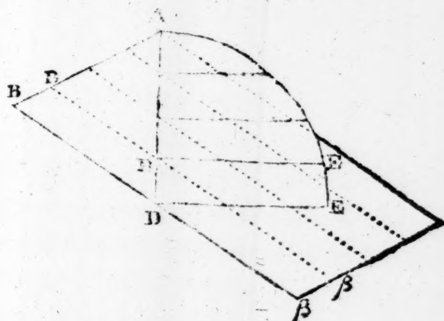


PROP.

PROP. CXXIV. *Corollarium.*

Item, *si Trianguli ADB rectæ respective ducantur in rectas Trapezii ADB (æque-alti, atque cum ipso Triangulo Parallelogrammum complentis;) quæ prodeunt rectangula erunt æqualia totidem similibus planis Conoideos (vel Pyramidoideos) Elliptici: Et mediæ proportionales DE, DE, &c. Erunt ordinatim applicatæ in (Circulo, vel saltem) Ellipsi.*

Demonstratio facile patet ex dictis ad Prop. 121. Et 123. Nam segmenta rectæ Bβ in hac figura tantundem valent atque segmenta Diametri in illa figura.



Si autem tam rectæ AD, DB, sint æquales, quam rectæ AD DE, ad invicem perpendiculares, erunt ipsæ DE, DE, ordinatim applicatæ in circulo; sint minus, saltem in ellipsi. Portio autem sive circuli sive Ellipseos AE, major est aut minor quam Quadrans, prout DB major est aut minor quam Dβ.

PROP. CXXV. *Corollarium.*

Si exponatur series Æqualium mulctata serie Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium

æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nempe,

Seriei	Quadrata	Cubi.
$R^3 - 000$	$R^6 - 00R^3 + 00$	$R^9 - 00R^6 + 00R^3 - 00$
$R^3 - a^3$	$R^6 - 2a^3R^3 + a^6$	$R^9 - 3a^3R^6 + 3a^6R^3 - a^9$
$R^3 - b^3$	$R^6 - 2b^3R^3 + b^6$	$R^9 - 3b^3R^6 + 3b^6R^3 - b^9$
$R^3 - c^3$	$R^6 - 2c^3R^3 + c^6$	$R^9 - 3c^3R^6 + 3c^6R^3 - c^9$
&c. ad	&c. usq; ad	&c. usq; ad
$R^3 - R^3$	$R^6 - 2R^3R^3 + R^6$	$R^9 - 3R^3R^6 + 3R^6R^3 - R^9$
summa $AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$	$AR^6 - \frac{2}{4}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6$	$AR^9 - \frac{3}{4}AR^9 + \frac{3}{7}AR^9 - \frac{1}{10}AR^9$
nempe $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$1 - \frac{2}{4} + \frac{1}{7} = \frac{18}{28}$	$1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{7} - \frac{1}{10} = \frac{162}{280}$
vel $\frac{3}{4}$	$\frac{3 \times 6}{4 \times 7}$	$\frac{2 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10}$

& sic deinceps, continue multiplicando numeros arithmetice proportionales (quousque cujuslibet potestatis gradus postulat) a 3 & 4, ternario continue crescentes.

PROP. CXXVI. *Coroll.*

P*Ari modo*, si exponatur series Æqualium mulctata serie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. $1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = \frac{32}{45}$. $1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{9} - \frac{1}{13} = \frac{384}{585}$ $1 - \frac{4}{5} + \frac{6}{9} - \frac{4}{13} + \frac{1}{17} = \frac{6144}{9945}$

vel $\frac{4}{5}$ $\frac{4 \times 8}{5 \times 9}$ $\frac{4 \times 8 \times 12}{5 \times 9 \times 13}$ $\frac{4 \times 8 \times 12 \times 16}{5 \times 9 \times 13 \times 17}$

Item $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. $1 - \frac{2}{6} + \frac{1}{11} = \frac{50}{66}$. $1 - \frac{3}{6} + \frac{3}{11} - \frac{1}{16} = \frac{750}{1056}$, $1 - \frac{4}{6} + \frac{6}{11} - \frac{4}{16} + \frac{1}{21} = \frac{15000}{22176}$

vel $\frac{5}{6}$ $\frac{5 \times 10}{6 \times 11}$ $\frac{5 \times 10 \times 15}{6 \times 11 \times 16}$ $\frac{5 \times 10 \times 15 \times 20}{6 \times 11 \times 16 \times 21}$

Et sic in aliis quibuslibet; nempe continue multiplicando numeros arithmetice proportionales (quousque gradus postulat) a 4 & 5, vel 5 & 6, vel 6 & 7, &c. quaternario, vel Quinario

nario, vel senario, &c. (secundum indicem seriei subductæ) continuè crescentes. Prout inductiône patebit. Ad hunc modum.

Ratio quam habet ad seriem maximo æqualium.

Seriei Æqualium mulctatæ serie	Residua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Surdesolida.
Primanorû	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$.	$\frac{2}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{24}$.	$\frac{6}{24}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{120}$.	$\frac{24}{120}\times\frac{5}{6}=\frac{120}{720}$.
Secûdanor.	$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$.	$\frac{8}{15}\times\frac{6}{7}=\frac{48}{105}$.	$\frac{48}{105}\times\frac{8}{9}=\frac{384}{945}$.	$\frac{384}{945}\times\frac{10}{11}=\frac{3840}{10395}$.
Tertianorû.	$\frac{3}{4}$.	$\frac{3}{4}\times\frac{6}{7}=\frac{18}{28}$.	$\frac{18}{28}\times\frac{9}{10}=\frac{162}{280}$.	$\frac{162}{280}\times\frac{12}{13}=\frac{1944}{3640}$.	$\frac{1944}{3640}\times\frac{15}{16}=\frac{29160}{58240}$.
Quartanor.	$\frac{4}{5}$.	$\frac{4}{5}\times\frac{8}{9}=\frac{32}{45}$.	$\frac{32}{45}\times\frac{12}{13}=\frac{384}{585}$.	$\frac{384}{585}\times\frac{16}{17}=\frac{6144}{9945}$:	$\frac{6144}{9945}\times\frac{20}{21}=\frac{122880}{208845}$.
Quintan.	$\frac{5}{6}$.	$\frac{5}{6}\times\frac{10}{11}=\frac{50}{66}$.	$\frac{50}{66}\times\frac{15}{16}=\frac{750}{1056}$.	$\frac{750}{1056}\times\frac{20}{21}=\frac{15000}{22176}$.	$\frac{15000}{22176}\times\frac{25}{26}=\frac{375000}{576576}$.

Et sic deinceps:

Et sic deinceps.

P p

Nempe

Nempe, si index seriei ablatæ ponatur a; rationem habebunt, ad seriem maximo Æqualium, ipsa

	Residua.	Quadrata.	Cubi. &c.	
quam habent	$\frac{a}{a+1}$.	$\frac{a}{a+1}\times\frac{2a}{2a+1}$.	$\frac{a}{a+1}\times\frac{2a}{2a+1}\times\frac{3a}{3a+1}$. &c.	ad unitatem. vel
vel	$\frac{a}{a+1}$.	$\frac{2a^2}{2a^2+3a+1}$.	$\frac{6a^3}{6a^3+11a^2+6a+1}$, &c.	
quā habet unitas ad	$\frac{a+1}{a}$.	$\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{2a}$.	$\frac{a+1}{a}\times\frac{2a\times1}{a}\times\frac{3a+1}{2a}$. &c.	
vel	$\frac{a+1}{a}$.	$\frac{2a^2+3a+1}{2a^2}$.	$\frac{6a^3+11a^2+6a+1}{6a^3}$. &c.	

Atq; hoc idem valebit si ablata series sit series Radicum.

Verbi gratia. Si a serie Æqualium auferatur series Subsecundanorum cujus index $\frac{1}{2}$. Nam si ponatur $a=\frac{1}{2}$. Erit $\frac{a+1}{a}=3$. Et $\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{2a}=3\times2=6$. Et $\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{a}\times\frac{3a+1}{3a}=3\times2\times1\frac{2}{3}=10$. &c Sunt autem, in ejusmodi ablationibus, Residua, quadrata, Cubi, &c. ad seriem maximo æqualium; ut 1 ad 3. 6. 10. &c.

Similiter, si auferatur series Subquartanorum, cujus index $\frac{1}{4}$; & ponatur $a=\frac{1}{4}$. Erit $\frac{a+1}{a}=5$. $\frac{2a+1}{2a}=3$. $\frac{3a+1}{3a}=2\frac{1}{3}$. $\frac{4a+1}{4a}=2$. &c. $5\times3=15$. $15\times2\frac{1}{3}=35$. $35\times2=70$. &c. Sunt autem, in ejusmodi Sublationibus, Residua, quadrata, cubi, biquadrata, &c. ut 1 ad 5, 15, 35, 70 &c. Et pariter in ejusmodi aliis, ut deinceps etiam ulterius patebit.

Interim placet propositiones aliquot præcedentes in Tabellam conjicere, propositioni sequenti subjungendam. Nempe.

PROP. CXXVII. *Theorema.*

SI exponatur (infinita) series Æqualium mulctata serie (analoga) Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. Residua ipsa, eorumq;

Quadrata

Quadrata, Cubi,&c. Eam rationem habebunt ad expositam seriem Æqualium; quam habet Unitas ad numeros in subjecta Tabella indicatos. Nempe --

Seriei Æqualium mulctatæ serie

	Resid.	Q.	Cubi	Biq.	Surdes.	Sextana.
Primanorum	$\frac{2}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{24}{6}$	$\frac{120}{24}$	$\frac{720}{120}$	$\frac{5040}{720}$
Secundanor.	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{105}{48}$	$\frac{945}{384}$	$\frac{10395}{3840}$	$\frac{135135}{46080}$
Tertianorũ	$\frac{4}{3}$	$\frac{28}{18}$	$\frac{280}{162}$	$\frac{3640}{1944}$	$\frac{58240}{24160}$	$\frac{1106560}{524880}$
Quartanorũ	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{585}{384}$	$\frac{9945}{6144}$	$\frac{208845}{192880}$	$\frac{5221125}{2949120}$
Quintanorũ	$\frac{6}{5}$	$\frac{66}{50}$	$\frac{1056}{750}$	$\frac{22176}{15000}$	$\frac{576576}{375000}$	$\frac{17873856}{11250000}$
Sextanorum	$\frac{7}{6}$	$\frac{91}{72}$	$\frac{1729}{1296}$	$\frac{43225}{31104}$	$\frac{1339975}{933120}$	$\frac{49579075}{33592320}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

Sequitur ex præced.

SCHOLIUM.

Verum quo pacto investigabitur, quam habeant rationem serierum illarum Apotomarum Radices quadraticæ, Cubicæ, &c. ad seriem totidem earum maximæ æqualium: Hic labor hoc opus est. Nihil enim aliud deest ad Circuli & Elipseos quadraturam. Ut ex Prop 121. jam patet, & ex propositionibus aliquot secuturis ulterius patebit.

PROP. CXXVIII. *Theorema.*

Si exponatur series Æqualium mulctata serie Subsecundanorum: Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{R} - \sqrt{a}$	$R - 2\sqrt{aR} + a$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{a} + 3a\sqrt{R} - a\sqrt{a}$
$\sqrt{R} - \sqrt{b}$	$R - 2\sqrt{bR} + b$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{b} + 3b\sqrt{R} - b\sqrt{b}$
$\sqrt{R} - \sqrt{c}$	$R - 2\sqrt{cR} + c$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{c} + 3c\sqrt{R} - c\sqrt{c}$
&c. ad	&c. ad	&c. usque ad
$\sqrt{R} - \sqrt{R}$	$R - 2\sqrt{RR} + R$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{R} + 3R\sqrt{R} - R\sqrt{R}$
$A\sqrt{R} - \frac{2}{3}A\sqrt{R}$	$AR - \frac{4}{3}AR + \frac{1}{2}AR$	$AR\sqrt{R} - \frac{6}{3}AR\sqrt{R} + \frac{3}{2}AR\sqrt{R} - \frac{2}{5}AR\sqrt{R}$
$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$1 - \frac{6}{3} + \frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{12}$
$\frac{1}{1+2}$	$\frac{1}{1+2+3}$	$\frac{1}{1+2+3+4}$

Et ſic deinceps; nempe eam rationem quam habet 1 ad numeros triangulares, ſive aggregatum numerorum arithmetice proportionalium (quouſque gradus poteſtatis poſtulat) ab 1 continue unitate creſcentium.

PROP. CXXIX. *Corollarium.*

ET Propterea, *Conoïdes (vel Pyramidoides) Complemento Semiparabolæ circa ipſius Ordinatim-applicatam aptatum, eſt ad Cylindrum (vel priſma) ejuſdem baſis & altitudinis, ut* 1 *ad* 6.

Nempe ut quadrata reſiduorum ſeriei Æqualium mulctatæ ſerie ſubſecundanorum, ad totidem maximo æqualium. Cum enim in ſemiparabolæ complemento AOT, rectæ ipſius diametro AT parallelæ, ſint reſidua Æqualium demptis ſubſecundanis nempe (ordinatim-applicatis in ſemi-parabola AOD;) ſi volvendo complementum illud AOT circa ipſam OT ut axem (vel etiam alias, ut alibi dictum eſt,) formetur conoïdes, (aut etiam Pyramidoides analogum,) cujus vertex O; circuli ſic volvendo deſcripti (vel ſimilia plana ſimiliter poſita) erunt in rectarum illarum (ipſi AT parallelarum) ratione duplicata. Hoc eſt, ut quadrata Reſiduorum ſeriei Æqualium ſublatis ſecundanis; ideoque ut 1 ad 6 per præced.

In Fig. Prop. 119.

SCHO-

SCHOLIUM.

Et pariter judicandum erit de Conoïdibus & Pyramidoïdibus complementi semiparaboloïdis cujusvis circa ipsius ordinatim-applicatam aptatis, juxta propositiones sequentes: Nempe mutatis mutandis, prout semiparaboloïdis gradus postulaverit. Puta in semiparaboloide cubicali, ut 1 ad 10; in Biquadraticali, ut 1 ad 15; in Surdesolidali, 1 ad 21. &c. juxta tabellam Prop. 131.

PROP. CXXX. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium mulctata serie subtertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{R^2} - 2\sqrt[3]{aR} + \sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{aR^2} + 3\sqrt[3]{a^2R} - \sqrt[3]{a^3}$
$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{R^2} - 2\sqrt[3]{bR} + \sqrt[3]{b^2}$	$\sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{bR^2} + 3\sqrt[3]{b^2R} - \sqrt[3]{b^3}$
$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{c}$	$\sqrt[3]{R^2} - 2\sqrt[3]{cR} + \sqrt[3]{c^2}$	$\sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{cR^2} + 3\sqrt[3]{c^2R} - \sqrt[3]{c^3}$
&c. ad	&c. ad	&c. usque ad
$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{R}$	$\sqrt[3]{R^2} - 2\sqrt[3]{RR} + \sqrt[3]{R^2}$	$\sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{RR^2} + 3\sqrt[3]{R^2R} - \sqrt[3]{R^3}$
$A\sqrt[3]{R} - \frac{3}{4} = A\sqrt[3]{R}$	$A\sqrt[3]{R^2} - \frac{6}{4}A\sqrt[3]{R^2} + \frac{3}{5}A\sqrt[3]{R^2}$	$AR - \frac{9}{4}AR + \frac{9}{5}AR - \frac{1}{2}AR$
$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{6}{4} + \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$	$1 - \frac{9}{4} + \frac{9}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$
$\frac{1}{1+3=4}$	$\frac{1}{4+6=10}$	$\frac{1}{10+10=20}$

Et sic deinceps; continue addendo numeros triangulares seu aggregata numerorum arithmetice proportionalium, ut habeatur consequens rationis cujus antecedens est 1.

PROP. CXXXI. *Theorema.*

P*Ari modo*, Si exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie Subquartanorum, Subquintanorum, &c. Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nam ut in ſubductione ſeriei ſubſecundanorum, conſequentes rationum fiunt continua additione numerorum arithmetice proportionalium, $1+2=3$. $1+2+3=3+3=6$. $1+2+3+4=6+4=10$. $1+2+3+4+5=10+5=15$. $1+2+3+4+5+6=15+6=21$. &c Ita in ſubductione ſubtertianorum conſequentes rationum fiunt continua additione numerorum illorum (3, 6, 10, 15, 21, &c) in ſubductione ſubſecundanorum modo inventorum; nempe $1+3=4$. $4+6=10$. $10+10=20$. $20+15=35$. $35+21=56$. &c. vel $1+1+2=1+3=4$. $4+1+2+3=1+3+6=10$. $10+1+2+3+4=1+3+6+10=20$. $20+1+2+3+4+5=1+3+6+10+15=35$. $35+1+2+3+4+5+6=1+3+6+10+15+21=56$. &c. Deinde ex numerorum jam inventorũ (4, 10, 20, 35, 56, &c.) continua additione, fiunt conſequentes rationũ in ſubductione ſeriei ſubquartanorũ, (nẽpe $1+4=5$. $5+10=15$. $15+20=35$. $35+56=91$. &c.) Et ex horum iterum continua additione, fiunt conſequentes rationum in ſubductione ſeriei proximæ (ſubquintanorum;) Et ſic deinceps ad hunc modum.

Ratio

Ratio quam habent ad feriem maximo Æqualium

Seriei Æqualium mulctatæ ferie	Refidua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Surdefolida	Sextana.
Primanor.	$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$	$\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}.$	$\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}.$	$\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}.$	$\frac{1}{5+1}=\frac{1}{6}.$	$\frac{1}{6+1}=\frac{1}{7}.$
Subfecun.	$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}.$	$\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$	$\frac{1}{6+4}=\frac{1}{10}.$	$\frac{1}{10+5}=\frac{1}{15}.$	$\frac{1}{15+6}=\frac{1}{21}.$	$\frac{1}{21+7}=\frac{1}{28}.$
Subtertia.	$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{4}.$	$\frac{1}{4+6}=\frac{1}{10}.$	$\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}.$	$\frac{1}{20+15}=\frac{1}{35}.$	$\frac{1}{35+21}=\frac{1}{56}.$	$\frac{1}{56+28}=\frac{1}{84}.$
Subquart.	$\frac{1}{1+3}=\frac{1}{5}.$	$\frac{1}{5+10}=\frac{1}{15}.$	$\frac{1}{15+20}=\frac{1}{35}.$	$\frac{1}{35+35}=\frac{1}{70}.$	$\frac{1}{70+56}=\frac{1}{126}.$	$\frac{1}{126+84}=\frac{1}{210}.$
Subquint.	$\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}.$	$\frac{1}{6+15}=\frac{1}{21}.$	$\frac{+}{21+35}=\frac{1}{56}.$	$\frac{1}{56+70}=\frac{1}{126}.$	$\frac{1}{120+126}=\frac{1}{252}.$	$\frac{1}{252+210}=\frac{1}{462}.$
Subfext.	$\frac{1}{1+6}=\frac{1}{7}.$	$\frac{1}{7+21}=\frac{1}{28}.$	$\frac{1}{28+56}=\frac{1}{84}.$	$\frac{1}{84+126}=\frac{1}{210}.$	$\frac{1}{210+252}=\frac{1}{462}.$	$\frac{1}{462+462}=\frac{1}{924}.$

Et fic deinceps.

Et fic deinceps.

SCHOLIUM

SCHOLIUM.

Atque hic obiter incidimus in numerorum figuratorum (ut dici solent) speculationem insperatam. Sunt enim numeri omnes (tam hujus quam sequentis Tabellæ) hujusmodi additione facti, figurati; putà Laterales, Triangulares, Pyramidales, &c. Quod, cum sit cuivis obvium, monuisse sufficiat.

Patet etiam, (in utraque Tabella,) series numerorum sic inventorum transversas easdem plane esse atque erectas.

Ex dictis autem licet propositionum aliquot præcedentium summam (nempe de serie Æqualium serie radicum mulctata) in unam Tabellam conjicere quam sequenti propositioni subjungam. Nempe ----

PROP. CXXXII. *Theorema.*

SI exponatur infinita series Æqualium mulctata analoga serie Primanorum (vel si libet, subprimanorum, quod tantundem valet) Subsecundanorum, Subtertianorum, &c. Residua ipsa, eorúmq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. eam rationem habebunt ad congruam seriem Æqualium, quam habet Unitas ad numeros in subjecta Tabella indicatos. Nempe

Seriei

	Seriei Æqualium mulctatæ serie										
	Nulla	Subprimanorum	Subsecundanorum	Subtertianorum	Subquartanorum	Subquintanorum	Subsextanorum	Subseptimanorum	Suboctavanorum	Subnonanorum	Subdecimanorum
Æqualia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Residua.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Quadrata.	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Cubi.	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
Biquadrat.	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
Surdesol.	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
Sextana.	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
Septimana	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
Octavana.	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
Nonana.	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
Decimana.	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

Sequitur ex præcedente. Numerus autem Tabellæ quilibet intermedius est aggregatus ex duobus sibi proximis altero sursum altero ad dextram positis.

Notandũ etiam est, eundem prodire rationis consequentem in residuorũ Quadratis si auferantur subtertiana, & in Cubis si auferantur subsecundana; item in sextanis si auferantur subseptimana, & in septimanis si auferantur subsextana; & sic ubique reciprocatis quasi potestatibus, ut ex inspecta tabella patet.

Sed & etiam alias idem aliquando accidit, puta in Surdesolidis si auferantur subprimana & in ipsis Residuis si auferantur subquintana, sed & in Quadratis si auferantur subsecundana; Item in Nonanis si auferantur subprimana, & in ipsis Residuis si auferantur subnonana, sed & in Cubis si auferantur subsecundana, & Quadratis si auferantur subtertiana: Item in Octavanis si auferantur subsextana, & sextanis si auferantur suboctavana, sed & in *Decimanis* si auferantur subquintana, & in Quintanis si auferantur subdecimana: & sic alibi ut ex tabella patet.

PROP. CXXXIII. *Theorema.*

SI exponatur series Primanorum mulctata serie secundanorum, Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta

Residua	Quadrata.	Cubi.
$aD - a^2$	$a^2D^2 - 2a^3D + a^4$	$a^3D^3 - 3a^4D^2 + 3a^5D - a^6$
$bD - b^2$	$b^2D^2 - 2b^3D + b^4$	$b^3D^3 - 3b^4D^2 + 3b^5D - b^6$
$cD - c^2$	$c^2D^2 - 2c^3D + c^4$	$c^3D^3 - 3c^4D^2 + 3c^5D - c^6$
&c usq: ad	&c usque ad	&c usque ad
$DD - D^2$	$D^2D^2 - 2D^3D + D^4$	$D^3D^3 - 3D^4D^2 + 3D^5D - D^6$
$\frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{3}AD^2$	$\frac{1}{3}AD^4 - \frac{2}{4}AD^4 + \frac{1}{5}AD^4$	$\frac{1}{4}AD^6 - \frac{3}{5}AD^6 + \frac{3}{6}AD^6 - \frac{1}{7}AD^6$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}AD^2$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}AD^4$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1\times2}{3\times4\times5} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$	$\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7} = \frac{6}{840} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2\times3} \times \frac{4}{4\times5} = \frac{1}{30}$	$\frac{1}{2\times3} \times \frac{4}{4\times5} \times \frac{9}{6\times7} = \frac{1}{140}$

Et sic deinceps; continue multiplicando Numeratores per

numeros

numeros quadratos, & denominatores per binos continue sequentes arithmetice proportionales.

PROP. CXXXIV. *Corollarium.*

IDeoq; *Si series Æqualium mulctata serie Primanorum respective ducatur in seriem Primanorum; Rectangulorum (aut ipsis æqualium vel etiam proportionalium Quadratorum aut figurarum quarumvis) aggregatum, ad aggregatum totidem æqualium, rationem habebit cognitam.*

Atq; idem accidet si Quadrata seriei illius in Quadrata hujus; Et cubi illius in cubos hujus, &c. respective ducantur.

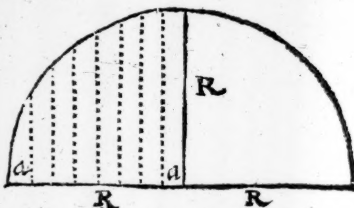
Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. præced. Nam si ducatur

$D - a$ in a	Q: $D - a$: $= D^2 - 2aD + D^2$ in a^2		C: $D - a$: $= D^3 - 3aD^2 \times 3a^2D - a^3$ in a^3
fiet $aD - a^2$ &c.	$a^2D^2 - 2a^3D + a$ &c.		$a^3D^3 - 3a^4D^2 + 3a^5D - a^6$ &c.

PROP. CXXXV. *Corollarium.*

IDeoq; *Semi-Circulus ad Quadratum Diametri (vel etiam Semi-Ellipsis ad Parallelogrammum Ellipsi circumscriptum) eam habet rationem quam habent Radices quadraticæ universales Residuorum seriei Primanorum serie Secundanorum mulctatæ, ad seriem Primanorum illorum maximæ Æqualium. Totus itaq; circulus (aut Ellipsis) ad illud Quadratum (vel Parallelogrammum) rationem habebit illius duplam.*

Nam si diameter circuli (vel etiam ellipseos ponatur *D*, (cu-



(cujus pars infinite parva $\frac{D}{\infty} = a$,) eique ordinatim-applicentur infinitæ rectæ (æqualiter ab invicem distantes) semicirculum (vel semi ellipsin) complentes; erunt illæ (ut notum est) mediæ proportionales (vel saltem in ellipsi mediis illis proportionalibus proportionales) inter diametri segmenta; Puta

inter	a	$2a$	$3a$	$4a$	
&	$D - a$	$D - 2a$	$D - 3a$	$D - 4a$	&c.
ideoq;	$\sqrt{:aD - a^2}:$	$\sqrt{:2aD - 4a^2}:$	$\sqrt{:3aD - 9a^2}:$	$\sqrt{:3aD - 16a^2}$	
vel	$\sqrt{:aD - a^2};$	$\sqrt{:bD - b^2}:$	$\sqrt{:cD - c^2}:$	$\sqrt{:dD - d^2}:$	

Adeoque omnium aggregatum, hoc est semicirculus, (vel semi-ellipsis) ad totidem ipsi $\sqrt{D^2}$ æqualium, puta ad quadratum Diametri (saltem ad diametrum in altitudinem ductum)

$$\text{ut}\quad \frac{\sqrt{:aD - a^2}: + \sqrt{:bD - b^2}: + \sqrt{:cD - c^2}: + \&c.\ \text{usq; ad}\ \sqrt{:DD - D^2},}{\text{ad}\quad \sqrt{D^2} + \sqrt{D^2} + \sqrt{D^2} + \&c. = A\sqrt{D^2} = AD}$$

Ideoque circulus integer ad idem quadratum, ut $2\sqrt{:aD - a^2}$ &c. ad AD.

PROP. CXXXVI. *Corollarium.*

ET proinde, *Si supponamus semiparabolæ cujusvis infinitas rectas (ordinatim-applicatas) in ejusdem, inverso situ positæ, respectivas rectas duci; quod provenit solidum ex infinitis illis Rectangulis conflatum (vel ex Quadratis, aut aliis quidem figuris similibus, quæ rectangulis illis æquentur) erit ad æquè-altum Parallelepipedum congruum (nempe cujus basis æquentur Quadrato basis semiparabolæ) ut Semicirculus ad Quadratum*

dratum Diametri. (Et quidem mediæ proportionales erunt in subduplicata ratione ordinatim-applicatarum in Circulo vel Ellipsi.)

Sit eadem parabola APO situ directo, & PAω situ inverso posita: erunt igitur (ex natura Parabolæ) Quadrata ordinatim-applicatarum (nempe rectarum D O, D O,&c. descendendo; vel Dω,Dω, &c. ascendendo,) infinita series Primanorum; puta *a*, 2*a*, 3*a* &c. vel eorum loco, *a*, *b*, *c*, &c. quorum maximum dicatur *D* (nempe quadratum basis P O vel A ω:) Et propterea, eadem inverso situ erunt $D - a$, $D - 2a$, $D - 3a$, &c. vel etiam $D - a$, $D - b$, $D - c$, &c. (Æquale enim est singulorum incrementum, si a minimo ordiamur, atque decrementum, si ordiamur a maximo.) Et consequenter ipsæ ordinatim-applicatæ (quippe in quadratorum suorum ratione subduplicata,) illic quidem $\sqrt{a}$, $\sqrt{2a}$, $\sqrt{3a}$, &c. vel $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c. hic autem $\sqrt{:D - a}$. $\sqrt{:D - 2a}$. $\sqrt{:D - 3a}$ &c. vel (eorum loco) $\sqrt{:D - a}$. $\sqrt{:D - b}$. $\sqrt{:D - c}$ &c. Ductis igitur his in illas, emergunt rectangula O D ω. Nempe

Ductis	$\sqrt{:D - a}$.	$\sqrt{:D - b}$	$\sqrt{:D - c}$	&c.
In	$\sqrt{a}$.	$\sqrt{b}$.	$\sqrt{c}$.	&c.
Fient	$\sqrt{:aD - a^2}$.	$\sqrt{:bD - b^2}$.	$\sqrt{:cD - c^2}$.	&c.

Horum autem rectangulorum omnium aggregatum, ad rectangulum $\sqrt{:D - 0}$. in $\sqrt{:D - 0}$, hoc est $\sqrt{D^2} = D$ toties positum: Hoc est, solidum ex illa multiplicatione ortum, ad dictum Parallelepipedum: est ut semicirculus ad quadratum Diametri, per præcedentem.

Et propterea etiam mediæ proportionales inter contiguas re-

ctas OD, Dω, erunt in subduplicata ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel ellipsi. quippe quia rectangula ODω sunt illis ordinatim applicatis proportionalia.

SCHOLIUM.

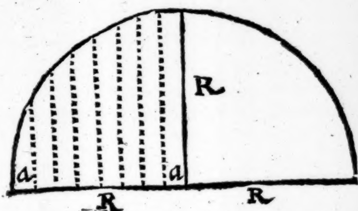
Nota tamen, non necessarium esse ut semi-parabola inverso situ posita sit plane eadem cum ea quæ ponitur situ directo: nam res non minus succedet in quibuslibet duabus semiparabolis inverso situ positis, modo æque altis. Ita tamen ut, si bases habeant inæquales, basis Parallelepipedi non sumatur, utriusvis Parabolarum basis quadrato, sed utriusq; rectangulo æqualis, puta P O × A ω. Quod monuisse sufficiat, cum eadem quæ præcessit demonstratio, levi immutatione facta, etiam huc accommodari possit. Vel etiam hoc inde facile inferri possit.

Figura vero ex omnibus mediis proportionalibus (inter OD, Dω,) constans, erit quoddam Elliptoides: cujus nempe ordinatim applicatarum quadrata sunt ipsis ordinatim applicatis in ellipsi proportionalia, ut patet. Sicut nempe in paraboloide Biquadratico ordinatim-applicatarum quadrata sunt ordinatim applicatis in parabola proportionalia; Et quadrata ordinatim applicatarum in Parabola proportionalia ipsis in triangulo Ordinatim applicatis.

PROP. CXXXVII. *Corollarium.*

ITem, *Sphæroides (vel etiam Conoides aut Pyramidoides Ellipticum,) ad Cylindrum (vel Prisma circumscriptum,) rationem habebunt eam quam habet quadruplum seriei Primanorum serie Secundanorum mulctatæ, ad seriem totidem Æqualium maximo Primanorum. Nempe ut* 2 *ad* 3.

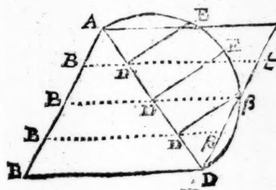
Cum



Cum enim rectæ in Circulo vel Ellipsi sint Duplum seriei $\surd : aD - a^2 :$ &c. Erunt plana in Conoide vel Pyramidoide ut Quadruplum ipsorum $aD - a^2$ &c. Ideoq; ad Prisma vel Cylindrum circumscriptum, ut 4 ad 6, vel 2 ad 3. Per prop. 133. Quod & antea ostensum erat prop. 123.

PROP. CXXXVIII. *Corollarium.*

ITem, *Si Parallelogrammum linea diagonali dividatur; rectæq; unius trianguli in continuas rectas alterius trianguli ducantur, mediæ proportionales erunt totidem (vel circuli, vel saltem) Ellipseos ordinatim applicatæ; earúmq; quadrata aut circuli (aut figuræ quæcunq; similes) Pyramidoidis aut conoidis Elliptici Plana.*



Sequitur ex duabus præced. Nam rectæ conterminæ sunt instar segmentorum Diametri. An autem circulus, an Ellipsis prodibit; judicandum erit eodem indicio, quo in prop. 124.

PROP. CXXXIX. *Theorema.*

SI exponatur series primanorum mulctata serie Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua

Refidua	Quadrata.	Cubi
$aD^2 - A^3$	$a^2 D^4 - 2a^4 D^2 + a^6$	$a^3 D^6 - 3a^5 D^4 + 3a^7 D^2 - a^9$
&c. ad	&c. usq; ad	&c usq; ad
$DD^2 - D^3$	$D^2 D^4 - 2D^4 D^2 + D^6$	$D^3 D^6 - 3D^5 D^4 + 3D^7 D^2 - D^9$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} AD^3$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} = \frac{8}{105} AD^6$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{10} = \frac{48}{1920} AD^9$
vel $\frac{2}{2 \times 4}$	$\frac{2 \times 4}{3 \times 5 \times 7}$	$\frac{2 \times 4 \times 6}{4 \times 6 \times 8 \times 10}$

Et fic deinceps; puta

$$\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10}{6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 16}. \quad \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12}{7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19} \text{ \&c.}$$

PROP. CXL. *Coroll.*

Idem accidet, fi feries Æqualium mulctata ferie Secundanorum, ducatur in feriem Primanorum. Et illius Quadrata, Cubi, &c. in Quadrata, Cubos &c. hujus.

(Puta, fi rectæ in femiparabola, diametro parallelæ, ducantur in rectas Parallelogrammi circumfcripti: nam earum continuationes, in complemento, funt feries Secundanorum.)

Quia nempe $D^2 - a^2$ in a eft $aD^2 - a^3$. &c.

PROP. CXLI. *Theorema.*

Si exponatur feries Primanorum mulctata ferie Quartanorum; Refiduorum Quadrata, Cubi, &c. ad feriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Refidua

Residua.	Quadrata.	Cubi.
$aD^3 - a^4$ &c.	$a^2D^6 - 2a^5D^3 + a^8$ &c.	$a^3D^9 - 3a^6D^6 + 3a^9D^3 - a^{12}$ &c.
$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}AL^4$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{6} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}AL^8$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{7} + \frac{3}{10} - \frac{1}{12} = \frac{16}{420}AD^{12}$
vel $\frac{3}{2 \times 5}$	$\frac{3 \times 6}{3 \times 6 \times 9}$	$\frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10 \times 12}$

Et sic deinceps, puta $\frac{3 \times 6 \times 9 \times 12}{5 \times 8 \times 11 \times 14 \times 17}$. $\frac{3 \times 6 \times 9 \times 12 \times 15}{6 \times 9 \times 12 \times 15 \times 18 \times 21}$. &c.

PROP. CXLII. *Coroll.*

Idem continget, si series Æqualium mulctata serie Tertianorum, ducatur in seriem Primanorum.

(Puta, si rectæ paraboloidis Cubicalis diametro Parallelæ, ducantur in rectas Trianguli inscripti: Nam earum continuationes in complemento, sunt series Tertianorum. Et similiter mutatis mutandis, in aliis propositionibus.)

Quia nempe $D^3 - a^3$ in a, est $aD^3 - a^4$.

SCHOLIUM.

Et pariter judicandum erit, mutatis mutandis, in aliis quibusvis casibus, ubi series hujusmodi componitur ex duabus vel pluribus aliis seriebus invicem multiplicatis, ut patet.

PROP. CXLIII. *Theorema.*

Pariter, si exponatur series Primanorum mulctata serie Quintanorum, Sextanorum, &c. Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta $\frac{4}{2 \times 6}$. $\frac{4 \times 8}{3 \times 7 \times 11}$. $\frac{4 \times 8 \times 12}{4 \times 8 \times 12 \times 16}$ $\frac{4 \times 8 \times 12 \times 16}{5 \times 9 \times 13 \times 17 \times 21}$ &c.

Item $\frac{5}{2 \times 7}$ $\frac{5 \times 10}{3 \times 8 \times 13}$ $\frac{5 \times 10 \times 15}{4 \times 9 \times 14 \times 19}$ $\frac{5 \times 10 \times 15 \times 20}{5 \times 10 \times 15 \times 20 \times 25}$ &c.

Et sic deinces, ut potestas seriei ablatæ postulaverit: Prout inductione patebit. Ideoq; ----

PROP. CXLIV. *Theorema.*

SI exponatur series Primanorum mulctata serie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Residua ipsa, eorúmq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella: Sive, quam habent numeri Tabellæ, ad Unitatem. Nempe

Seriei Primanorum mulctatæ serie

	Residua	Quadrata	Cubi	Biquadrata
Secundan.	$\frac{1}{2\times3}$	$\frac{1\times2}{3\times4\times5}$	$\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{5\times6\times7\times8\times9}$
Tertianor.	$\frac{2}{2\times4}$	$\frac{2\times4}{3\times5\times7}$	$\frac{2\times4\times6}{4\times6\times8\times10}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}$
Quartan.	$\frac{3}{2\times5}$	$\frac{3\times6}{3\times6\times9}$	$\frac{3\times6\times9}{4\times7\times10\times13}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{5\times8\times11\times14\times17}$
Quintan.	$\frac{4}{2\times6}$	$\frac{4\times8}{3\times7\times11}$	$\frac{4\times8\times12}{4\times8\times12\times16}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{5\times9\times13\times17\times21}$
Sextanor.	$\frac{5}{2\times7}$	$\frac{5\times10}{3\times8\times13}$	$\frac{5\times10\times15}{4\times9\times14\times19}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{5\times10\times15\times20\times25}$
Septiman.	$\frac{6}{2\times8}$	$\frac{6\times12}{3\times9\times15}$	$\frac{6\times12\times18}{4\times10\times16\times22}$	$\frac{6\times12\times18\times24}{5\times11\times17\times23\times29}$
Octavan.	$\frac{7}{2\times9}$	$\frac{7\times14}{3\times10\times17}$	$\frac{7\times14\times21}{4\times11\times18\times25}$	$\frac{7\times14\times21\times28}{5\times12\times19\times26\times33}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

PROP.

PROP. CXLV. *Theorema.*

S*Imiliter*, si exponatur series Secundanorum mulctata serie Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum, &c; Residua ipsa, eorumq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad seriem Æqualium

Seriei Secundanorum mulctatæ serie	Residua.	Quadrata.	Cubi	Biquadrata.
Tertian.	$\frac{1}{3\times4}$	$\frac{1\times2}{5\times6\times7}$	$\frac{1\times2\times3}{7\times8\times9\times10}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{9\times10\times11\times12\times13}$
Quart.	$\frac{2}{3\times5}$	$\frac{2\times4}{5\times7\times9}$	$\frac{2\times4\times6}{7\times9\times11\times13}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{9\times11\times13\times15\times17}$
Quintan.	$\frac{3}{3\times6}$	$\frac{3\times6}{5\times8\times11}$	$\frac{3\times6\times9}{7\times10\times13\times16}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{9\times12\times15\times18\times21}$
Sextan.	$\frac{4}{3\times7}$	$\frac{4\times8}{5\times9\times13}$	$\frac{4\times8\times12}{7\times11\times15\times19}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{9\times13\times17\times21\times25}$
Septim.	$\frac{5}{3\times8}$	$\frac{5\times10}{5\times10\times15}$	$\frac{5\times10\times15}{7\times12\times17\times22}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{9\times14\times19\times24\times29}$
Octav.	$\frac{6}{3\times9}$	$\frac{6\times12}{5\times11\times17}$	$\frac{6\times12\times18}{7\times13\times19\times25}$	$\frac{6\times12\times18\times24}{9\times15\times21\times27\times33}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patet.

PROP. CXLVI. *Theorema.*

I*Tem*, Si exponatur series Tertianorum mulctata serie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c.

Residua ipsa, eorumq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad seriem Æqualium

Seriei Tertianorum mulctatæ serie

	Res	Quadr	Cubi.	Biquadrata.
Quartanorum	$\frac{1}{4\times5}$	$\frac{1\times2}{7\times8\times9}$	$\frac{1\times2\times3}{10\times11\times12\times13}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{13\times14\times15\times16\times17}$
Quintanorum	$\frac{2}{4\times6}$	$\frac{2\times4}{7\times9\times11}$	$\frac{2\times4\times6}{10\times12\times14\times16}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{13\times15\times17\times19\times21}$
Sextanorum	$\frac{3}{4\times7}$	$\frac{3\times6}{7\times10\times13}$	$\frac{3\times6\times9}{10\times13\times16\times19}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{13\times10\times19\times2\times25}$
Septimanorũ	$\frac{4}{4\times8}$	$\frac{4\times8}{7\times11\times15}$	$\frac{4\times8\times12}{10\times14\times18\times22}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{13\times17\times21\times25\times29}$
Octavanorum	$\frac{5}{4\times9}$	$\frac{5\times10}{7\times12\times17}$	$\frac{5\times10\times15}{10\times15\times20\times25}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{13\times18\times23\times28\times33}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

SCHOLIUM.

Atque eodem modo facile erit vel has Tabellas quousq; libet continuare, vel alias etiam pro seriebus sequentibus componere; puta Seriebus Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. mulctatis seriebus quibuslibet superioris potestatis.

PROP.

PROP. CXLVII. *Theorema.*

SI exponatur series Subsecundanorum mulctata serie Primanorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium rationem habebunt cognitam.

Nempe eam quæ exhibetur prop. 153 Puta

Residua.	Quadrata	Cubi.
$\sqrt{aD} - \sqrt{a^2}$	$\sqrt{a^2D^2} - 2\sqrt{a^3D} + \sqrt{a^4}$	$\sqrt{a^3D^3} - 3\sqrt{a^4D^2} + 3\sqrt{a^5D} - \sqrt{a^6}$
&c. ad	&c usq; ad	&c. usq; ad
$\sqrt{DD} - \sqrt{D^2}$	$\sqrt{D^2D^2} - 2\sqrt{D^3D} + \sqrt{D^4}$	$\sqrt{D^3D^3} - 3\sqrt{D^4D^2} + 3\sqrt{D^5D} - \sqrt{D^6}$
$\frac{2}{3}A\sqrt{D^2} - \frac{2}{4}A\sqrt{D^2}$	$\frac{2}{4}A\sqrt{D^4} - \frac{4}{5}A\sqrt{D^4} + \frac{2}{6}AD^2$	$\frac{2}{5}AD^3 - \frac{6}{6}AD^3 + \frac{6}{7}AD^3 - \frac{2}{8}AD^3$
$\frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{5} + \frac{2}{6} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{6} + \frac{6}{7} - \frac{2}{8} = \frac{12}{1680} = \frac{1}{140}$
$\frac{2}{3\times4} = \frac{1}{2\times3}$	$\frac{2\times2}{4\times5\times6} = \frac{1\times2}{3\times4\times5}$	$\frac{2\times3\times2}{5\times6\times7\times8} = \frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7}$

PROP. CXLVIII. *Corollar.*

IDem continget si series Æqualium mulctata serie Subsecundanorum, ducatur in seriem Subsecundanorum.

(Puta si ordinatim applicatæ in semi-parabola ducantur in earundem continuationes in ipsius complemento.) Nam $\sqrt{D} - \sqrt{a}$ in $\sqrt{a}$ facit $\sqrt{aD} - \sqrt{a^2} = \sqrt{aD} - a$ &c. Et facta ab eorum quadratis, aquantur quadratis horum &c.

PROP.

PROP. CXLIX. *Corollarium.*

Patet etiam; Easdem provenire rationes, sive exponatur series $a - a^2$ &c. sive series $\sqrt{a} - \sqrt{a^2}$ &c. (vel $\sqrt{a} - a$:)

Nempe, collatis Prop. 133. & 146.

SCHOLIUM.

Ideoque & reliqua quæ post Prop. 133. habentur Corollaria, huc etiam (mutatis mutandis) non difficulter transferri possent. quod monuisse sufficiat.

PROP. CL. *Theorema.*

Si exponatur series Subsecundanorum mulctata serie Radicum quadraticarum Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{aD^2} - \sqrt{a^3}$ &c.	$\sqrt{a^2D^4} - 2\sqrt{a^4D^2} + \sqrt{a^6}$ &c.	$\sqrt{a^3D^6} - 3\sqrt{a^5D^4} + 3\sqrt{a^7D^2} - \sqrt{a^9}$ &c.
$\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{6} + \frac{2}{8} = \frac{16}{192} = \frac{1}{12}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{7} + \frac{6}{9} - \frac{2}{11} = \frac{96}{3465}$
$\frac{4}{3 \times 5} A\sqrt{D^3}$	$\frac{4 \times 4}{4 \times 6 \times 8} A\sqrt{D^6}$	$\frac{4 \times 4 \times 6}{5 \times 7 \times 9 \times 11} A\sqrt{D^9}$

PROP. CLI. *Coroll.*

Idem continget, si series Æqualium mulctata serie Primanorum, ducatur in seriem Subsecundanorum.

Quia $D - a$ vel $\sqrt{D^2} - \sqrt{a^2}$ in $\sqrt{a}$, facit $D\sqrt{a} - a\sqrt{a}$, vel $\sqrt{aD^2} - \sqrt{a^3}$.

SCHOLIUM.

Et similiter etiam alibi intelligendum est, ubi series exposita dividi possit, in duas vel plures componentes.

PROP.

PROP. CLII. *Theorema.*

SI exponatur series Subsecundanorum mulctata serie Secundanorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua.	quadrata.	Cubi.
$\sqrt{aD^3} - \sqrt{a^4}$ &c.	$\sqrt{a^2D^6} - 2\sqrt{a^5D^3} + \sqrt{a^8}$ &c.	$\sqrt{a^3D^9} - 3\sqrt{a^6D^6} + 3\sqrt{a^9D^3} - \sqrt{a^{12}}$ &c.
$\frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{7} + \frac{2}{10} = \frac{36}{280} = \frac{9}{70}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{8} + \frac{6}{11} - \frac{2}{14} = \frac{324}{6160} = \frac{81}{1540}$
$\frac{6}{3 \times 6}$	$\frac{6 \times 6}{4 \times 7 \times 10}$	$\frac{6 \times 6 \times 9}{5 \times 8 \times 11 \times 14}$

Et sic deinceps. Et similiter in subductione seriei cujusvis potestatis superioris. Adeoq; ----

PROP. CLIII. *Theorema.*

SI exponatur series Subsecundanorum mulctata serie Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. vel Radicum quadraticarum Tertianorum, Quintanorum, &c. Residua ipsa, eorúmq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio

Ratio quam habent ad seriem Æqualium

Seriei Subsecundanorum mulctatæ serie

	Residua	Quadrata	Cubi	Biquadrata
Primanor.	$\frac{2}{3\times4}$	$\frac{2\times2}{4\times5\times6}$	$\frac{2\times2\times3}{5\times6\times7\times8}$	$\frac{2\times2\times3\times4}{6\times7\times8\times9\times10}$
√Tertian.	$\frac{4}{3\times5}$	$\frac{4\times4}{4\times6\times8}$	$\frac{4\times4\times6}{5\times7\times9\times11}$	$\frac{4\times4\times6\times8}{6\times8\times10\times12\times14}$
Secundan.	$\frac{6}{3\times6}$	$\frac{6\times6}{4\times7\times10}$	$\frac{6\times6\times9}{5\times8\times11\times14}$	$\frac{6\times6\times9\times12}{6\times9\times12\times15\times18}$
√Quintan.	$\frac{8}{3\times7}$	$\frac{8\times8}{4\times8\times12}$	$\frac{8\times8\times12}{5\times9\times13\times17}$	$\frac{8\times8\times12\times16}{6\times10\times14\times18\times22}$
Tertianor.	$\frac{10}{3\times8}$	$\frac{10\times10}{4\times9\times14}$	$\frac{10\times10\times15}{5\times10\times15\times20}$	$\frac{10\times10\times15\times20}{6\times11\times16\times21\times26}$
√Septim.	$\frac{12}{3\times9}$	$\frac{12\times12}{4\times10\times16}$	$\frac{12\times12\times18}{5\times11\times17\times23}$	$\frac{12\times12\times18\times24}{6\times12\times18\times24\times30}$
Quartan.	$\frac{14}{3\times10}$	$\frac{14\times14}{4\times11\times18}$	$\frac{14\times14\times21}{5\times12\times19\times26}$	$\frac{14\times14\times21\times28}{6\times13\times20\times27\times34}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

PROP. CLIV. *Theorema.*

Pariter, Si exponatur series Subtertianorum mulctata serie Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. vel Radicum cubicarum Secundanorum, Quartanorum, Quintanorum, Septimanorum, &c. Residua ipsa, eorumq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio

Ratio quam habent ad seriem Æqualium.

Seriei Subtertianorum mulctatæ serie

	Residua	Quadr.	Cubi	Biquadrata
√c. Secun.	$\frac{3}{4\times5}$	$\frac{3\times2}{5\times6\times7}$	$\frac{3\times2\times3}{6\times7\times8\times9}$	$\frac{3\times2\times3\times4}{7\times8\times9\times10\times11}$
Primanor.	$\frac{6}{4\times6}$	$\frac{6\times4}{5\times7\times9}$	$\frac{6\times4\times6}{6\times8\times10\times12}$	$\frac{6\times4\times6\times8}{7\times9\times11\times13\times15}$
√c. Quart.	$\frac{9}{4\times7}$	$\frac{9\times6}{5\times8\times11}$	$\frac{9\times6\times9}{6\times9\times12\times15}$	$\frac{9\times6\times9\times12}{7\times10\times13\times16\times19}$
√c. Quint.	$\frac{12}{4\times8}$	$\frac{12\times8}{5\times9\times13}$	$\frac{12\times8\times12}{6\times10\times14\times18}$	$\frac{12\times8\times12\times16}{7\times11\times15\times19\times23}$
Secundan.	$\frac{15}{4\times9}$	$\frac{15\times10}{5\times10\times15}$	$\frac{15\times10\times15}{6\times11\times16\times21}$	$\frac{15\times10\times15\times20}{7\times12\times17\times22\times27}$
√c. Septi.	$\frac{18}{4\times10}$	$\frac{18\times12}{5\times11\times17}$	$\frac{18\times12\times18}{6\times12\times18\times24}$	$\frac{18\times12\times18\times24}{7\times13\times19\times25\times31}$
√c. Octav.	$\frac{21}{4\times11}$	$\frac{21\times14}{5\times12\times19}$	$\frac{21\times14\times21}{6\times13\times20\times27}$	$\frac{21\times14\times21\times28}{7\times14\times21\times28\times35}$
Tertianor.	$\frac{24}{4\times12}$	$\frac{24\times16}{5\times13\times21}$	$\frac{24\times16\times24}{6\times14\times22\times30}$	$\frac{24\times16\times24\times32}{7\times15\times23\times31\times39}$

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

SCHOLIUM.

Et simili methodo non erit difficile & has Tabellas quousq; libet & continuare & alias etiam pro seriebus aliis componere; puta seriebus subquartanorum, subquintanorum, &c. (aut quidem radicum quadraticarum subtertianorum, subquintanorum, &c. vel radicum cubicarum subsecundanorum, subquartanorum &c. aut aliarum similium,) mulctatis seriebus quibuslibet superioris potestatis.

Sed & facile eſt has Tabellas (aliaſque ſimiliter condendas) interpolare, ſaltem quoad altitudinem, interponendo ſeries tranſverſas quotlibet, ut ex ipſa Tabellarum progreſſione rite conſiderata patebit.

Verbi gratia, in Tabella Prop. 144. Si ſeries primanorum mulctetur ſerie Radicum quadraticarum Quintanorum, interponenda erit huic ablationi conveniens ſeries alia tranſverſa inter primam & ſecundam iſtius Tabellæ (quia nempe Radices quadraticæ Quintanorum, quarum index eſt $\frac{5}{2}$, vel $2\frac{1}{2}$, medium locum habent inter ſecundana & tertiana, quorum indices 2 & 3;) eritque ſeries illa.

	Reſidua.	Quad.	Cubi.	Biquad
	$\frac{1\frac{1}{2}}{2\times3\frac{1}{2}}$.	$\frac{1\frac{1}{2}\times3}{3\times4\frac{1}{2}\times6}$.	$\frac{1\frac{1}{2}\times3\times4\frac{1}{2}}{4\times5\frac{1}{2}\times7\times8\frac{1}{2}}$.	$\frac{1\frac{1}{2}\times3\times4\frac{1}{2}\times6}{5\times6\frac{1}{2}\times8\times9\frac{1}{2}\times11}$
vel	$\frac{3}{2\times7}$	$\frac{3\times6}{3\times9\times12}$	$\frac{3\times6\times9}{4\times11\times14\times17}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{5\times13\times16\times19\times22}$
vel	$\frac{6}{4\times7}$	$\frac{6\times6}{6\times9\times12}$	$\frac{6\times6\times9}{8\times11\times14\times17}$	$\frac{6\times6\times9\times12}{10\times13\times16\times19\times22}$

Atque idem etiam in aliis Tabellis præſtare non erit difficile, ſi proceſſui cujuſvis Tabellæ attendatur.

At quo pacto licebit eaſdem Tabellas interpolare quoad latitudinem, ſeriebus ſcilicet erectis alias interponendo; (puta radicum univerſalium Reſiduorum, Radicum quadraticarum Cuborum, &c. vel Radicum cubicarum Reſiduorum, Quadratorum, Biquadratorum, &c. vel ſimilium;) non adeo facilis eſt labor, ſi quidem poſſibilis. Illud autem deinceps, quoad potero, conabor, & quidem aliquouſque præſtabo, licet illud univerſaliter efficere vix ſpondere auſim.

Interim de ſeriebus auctis aliqua dicenda ſunt, ne videar eas penitus omittere; ſed breviter, ne ſim tædio.

PROP.

PROP. CLV. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium aucta serie Primanorum; Aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata.	Cubi.
$R+a$	$R^2+2aR+a^2$	$R^3+3aR^2+3a^2R+a^3$
&c. ad	&c. usq; ad	&c. usq; ad
$R+R$	$R^2+2RR+R^2$	$R^3\ 3RR^2+3R^2R+R^3$
$AR+\frac{1}{2}AR$	$AR^2+\frac{2}{2}AR^2+\frac{1}{3}AR^2$	$AR^3+\frac{3}{2}AR^3+\frac{3}{3}AR^3+\frac{1}{4}AR$
$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$1+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	$1+\frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

Ubi numerator quilibet constat ex præcedentis duplo unitate aucto: Denominator ex præcedente unitate aucto.

PROP. CLVI. *Corollarium.*

IDeoq;, *Si Trapezio (ex Parallelogrammo & Triangulo, æqualium basium & altitudinum, conflato) aptetur Conoides (vel Pyramidoides) truncatum (sive conversione circa axem, sive aliàs;) erit illud ad Cylindrum vel Prisma inscriptum, ut* $\frac{7}{3}$ *ad* 1, *vel, ut* 7 *ad* 3:

Nempe ut quadrata seriei Æqualium serie Primanorum auctæ, ad seriem Æqualium.

Sin Parrallelogrammi & Trianguli basis sint inæquales moderamen adhibendum est.

PROP. CLVII. *Corollarium.*

SI autem *Conoides vel Pyramidoides illud Cylindricè vel Prismaticè excavetur; residuum erit (ad exem-*

tum Cylindrum vel Prisma maximum inscriptum) ut 4 *ad* 3.

Nempe ut $\frac{7}{3} - \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$ ad 1.

PROP. CLVIII. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium aucta serie Secundanorum; aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. (Puta, si Parallelogrammum complemento Semiparabolæ augeatur.)

Nempe, pro quovis termino seriei primanorum posito a (ad abbreviandam operationem) & propterea pro quovis termino secundanorum a^2, &c. Erunt

Aggregata $R^2 + a^2$ &c.	Quadrata. $R^4 + 2a^2R + a^4$ &c.	Cubi. $R^6 + 3a^2R^4 + 3a^4R^2 + a^6$ &c.
$1AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$ $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	$1AR^4 + \frac{2}{3}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$ $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{28}{15}$	$1AR^6 + \frac{3}{3}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 + \frac{1}{2}AR^6$ $1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{7} = \frac{288}{105}$

SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, si series Æqualium augeatur serie Tertianorum, Quartanorum, &c. Ut patet.

PROP. CLIX. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium aucta serie Subsecundanorum; aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. (Puta si Parallelogrammum augeatur semiparabolâ.) Nempe

Aggregata

Aggregata	Quadrata	Cubi
$\sqrt{R}+\sqrt{a}$ &c.	$\sqrt{R^2}+2\sqrt{aR}+\sqrt{a^2}$ &c.	$\sqrt{R^3}+3\sqrt{aR^2}+3\sqrt{a^2R}+\sqrt{a^3}$ &c.
$A\sqrt{R}+\frac{2}{3}A\sqrt{R}$	$A\sqrt{R^2}+\frac{4}{3}A\sqrt{R^2}+\frac{2}{4}A\sqrt{R^2}$	$A\sqrt{R^3}+\frac{6}{3}A\sqrt{R^3}+\frac{6}{4}A\sqrt{R^3}+\frac{2}{5}A\sqrt{R^3}$
$\frac{2}{2}+\frac{2}{3}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$	$\frac{2}{2}+\frac{4}{3}+\frac{2}{4}=\frac{68}{24}=\frac{17}{6}$	$\frac{2}{2}+\frac{6}{3}+\frac{6}{4}+\frac{2}{5}=\frac{588}{120}=\frac{42}{10}$

PROP. CLX. *Theorema.*

SI ſeries Æqualium augeatur ſerie Subtertianorum; Aggregata, eorúmq; Quadrata, Cubi, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

(Puta, ſi Parallelogrammum augeatur ſemiparaboloide Cubicali,) Nempe.

Aggregata	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{a}$ &c.	$\sqrt[3]{R^2}+2\sqrt[3]{aR}+\sqrt[3]{a^2}$ &c.	$\sqrt[3]{R^3}+3\sqrt[3]{aR^2}+3\sqrt[3]{a^2R}+\sqrt[3]{a^3}$ &c.
$1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$	$1+\frac{6}{4}+\frac{3}{5}=\frac{31}{10}$	$1+\frac{9}{4}+\frac{9}{5}+\frac{3}{6}=\frac{111}{20}$

SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, ſi exponatur ſeries Æqualium aucta ſerie ſubquartanorum, ſubquintanorum, &c. vel etiam ſerie radicum quadraticarum Cuborum, Surdeſolidorum, &c. vel radicum cubicarum Secundanorum, Quartanorum, &c. Et pariter in aliis.

PROP. CLXI. *Theorema.*

PAriter, ſi ſeries Primanorum augeatur ſerie Secundanorum; Aggregata, eorúmq; Quadrata, Cubi, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Aggregata	Quadrata.	Cubi.
$aR+a^2$ &c.	$a^2R^2+2a^3R+a^4$ &c.	$a^3R^3+3a^4R^2+3a^5R+a^6$ &c.
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}AR^2$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}AR^4$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+\frac{1}{7}=\frac{209}{140}AR^6$

SCHOL.

SCHOLIUM.

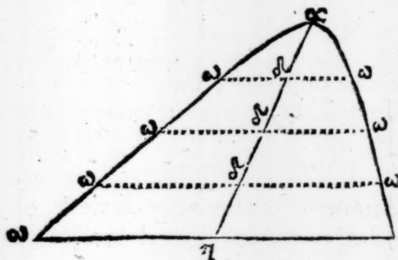
Et pari modo procedendum erit, si exponatur series primanorum (vel etiam Secundanorum, Tertianorum, &c.) aucta serie quâlibet alia, ut non sit opus hisce diutius immorari.

PROP. CLXII. *Corollarium.*

IDeoq; , *Conoides vel Pyramidoides Hyperbolicum, ad semissem Cylindri vel Prismatis circumscripti, est ut* 5 *ad* 6*: ad totum vero, ut* 5 *ad* 12.

Intellige, si tam transversa diameter, quam diameter intercepta maxima, ponatur æqualis lateri recto: secus enim adhibenda erit moderatio.

Nam, si ponatur Hyperbolæ latus rectum l vel R, transversa diameter $t = l$, & diameter intercepta d, erunt quadrata ordinatim-applicatarum $dl + \frac{d}{t}dl$ (per prop. 33. Con. Sect.) vel (propter $t = l$) $dl + d^2$. Et propterea (cum sit l vel R, certa quantitas, & d mutabilis & quidem altitudini proportionalis, pro qua igitur substitui potest a, b, c, &c.) erunt omnium quadrata (adeoq; & plana Conoidis vel Pyramidoidis) series infinita Primanorum aucta serie Secundanorum; puta $aR + a^2$, $bR + b^2$, $cR + c^2$, &c. usq; ad $R^2 + R^2$. Adeoq; series illa ad semissem seriei totidem maximo ($R^2 + R^2 = 2R^2$) æqualium (puta ad AR^2) erit ut 5 ad 6, per præced. Et propterea ad integram illam seriem æqualium, ut 5 ad 12. Quod erat propositum.



SCHOL.

SCHOLIUM.

Idem tamen eveniet, si saltem sumatur Diameter-intercepta maxima æqualis Diametro-Transversæ. Ut colligi poterit ex propositione sequente.

PROP. CLXIII. *Corollarium.*

SI autem non adsit limitatio prop. præced. Erit ratio Conoidis vel Pyramidoidis ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, utut non eadem quæ illic innuitur, cognita tamen.

Cum enim, utcunq;, quadratum ordinatim-applicatæ in Hyperbola sit $dl + \frac{dd}{t} l$, vel $dL + \frac{dd}{T} L$, vel $\frac{dT + dd}{T} L$, si pro diametris interceptis, d, d, &c. ponantur successive a, b, c, &c. sitq; omnium maxima D, adeoq; quadratum ordinatim-applicatæ maximæ $\frac{DT + DD}{T} L$. Erunt omnia $aT + bT +$ cT (&c. usq; ad DT) $= \frac{1}{2}$ ADT; & omnia $a^2 + b^2 + c^2$ (&c. ad D^2) $= \frac{1}{3} AD^2$; quorum aggregatum $\frac{1}{2} ADT + AD^2$ si ducatur in L, & factum illud dividatur per T; prodibit $\frac{\frac{1}{2} ADT + \frac{1}{3} AD^2}{T} L$, vel etiam $\frac{\frac{1}{2} T + \frac{1}{3} D}{T}$ ADL: vel deniq; $\frac{3T + 2D}{6T}$ ADL: Quam autem habet rationem $\frac{3T + 2D}{6T}$ ADL, aggregatum quadratorum omnium ordinatim-applicatarum; ad $\frac{DT + D^2}{T}$ AL vel $\frac{T + D}{T}$ ADL, aggregatum totidem Quadrato maximæ æqualium: eam habet Conoides vel Pyramidoides illud, ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, (propter plana quadratis illis proportionalia;) nempe, ut $\frac{3T + 2D}{6T}$, ad $\frac{T + D}{T}$, vel, ut $3T + 2D$ ad $6T + 6D$. vel, ut $\frac{1}{2} T + \frac{1}{3} D$ ad $T + D$. Adeoq; ----.

PROP.

PROP. CLXIV. *Coroll.*

Ut semissis Diametri Transversæ auctus triente Diametri Interceptæ, ad Transversæ & Interceptæ aggregatum; seu, ut Triplum Transversæ simul cum Duplo Interceptæ, ad simul utriusq; sextuplum: sic est Conoides vel Pyramidoides Hyperbolicum, ad Cylindrum vel Prisma (super eadem basi) circumscriptum.

Patet ex præcedente.

PROP. CLXV. *Corollarium.*

Item, *Hyperbola ad Parallelogrammum circumscriptum, est ut Series Radicum universalium seriei Primanorum serie Secundanorum respectivè auctæ, ad seriem totidem Radicum maximæ æqualium.*

Nampe si adsit limitatio prop. 162, ut $\surd: aR+a^2 : +\surd: bR+b^2 : +\surd: cR+c^2:$ &c. (usq; ad $\surd: R^2+R^2:$) ad $A\surd: R^2+R^2: = A\surd 2R^2 = AR\surd 2$ Hoc est, ut omnes ordinatim-applicatæ ad maximam toties positam.

Si verò illa limitatio non adsit; saltem erit ut $\surd: \frac{aT+a^2}{T} L: +\surd: \frac{bT+b^2}{T} L: +\surd: \frac{cT+c^2}{T} L:$ &c. (usq; ad $\surd: \frac{DT+D^2}{T} L:$) ad $A\surd: \frac{DT+D^2}{T} L:$ Hoc est, (dividendo omnia per $\surd L$ & multiplicando in $\surd T$) ut $\surd: aT+a^2. +\surd: bT+b^2: \surd: cT+c^2$ &c. (usq; ad $\surd: DT+D^2:$) ad $A\surd: DT+D^2:$ ut patet ex demonstratione prop. 163.

SCHOLIUM.

At quo pacto tandem ratio aggregati radicum illarum universalium, ad aggregatum totidem maximæ æqualium, numeris explicari poterit, non ita facile ostendetur.

Adeoq; & hic incidimus in eandem difficultatem in quadratura Hyperbolæ, quam supra aliquoties meminimus de quadratura

dratura Circuli vel Ellipseos, (aliarumq; aliquot curvarum:) nempe ut inquiratur jam ratio quam habet infinita series Radicum-universalium Binomiorum, sicut illic Apotomarum.

Et quidem aliquando proclivis eram ut crederem rem planè impossibilem esse ut Radices surdæ numero infinitæ & invicem incommensurabiles ita in unum aggregatum coire possint ut illud, ad expositam aliquam quantitatem rationalem, rationem habent explicabilem.

Atq; hoc quidem eo magis adhuc confirmatum esse videbatur, quoniam ejusmodi series finita ad seriem totidem maximæ æqualium vix aliam passa est rationis explicationẽ quam omnes sigillatim repetendo, raro enim duæ vel plures occurrunt commensurabiles quæ in unam additione colligi possint.

Verbi gratia, si ponatur circuli radius partium 6 sinus recti in Quadrante singulis partium istarum terminis insistentes, erunt, $\sqrt{:36-0:}+\sqrt{:36-1:}+\sqrt{:36-4:}+\sqrt{:36-9:}+\sqrt{:36-16:}+\sqrt{:36-25:}+\sqrt{:36-36:}$ (per ea quæ dicta sunt ad pr. 121.) vel quod eodem recidit, $\sqrt{36}+\sqrt{35}+\sqrt{32}+\sqrt{27}+\sqrt{20}+\sqrt{11}+\sqrt{0}$; vel, ut irrationalitas ad minimos terminos reducatur, $6+\sqrt{35}+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{11}+0$: Ratio igitur quam habet illud radicum aggregatum ad radicem maximam toties positam, puta $7\sqrt{:36-0:}$ vel $7\sqrt{36}$ vel 7×6 hoc est 42; non explicatius efferri potest quam $\frac{6+\sqrt{35}+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{11}+0}{42}$.
Atq; ea est ratio quam habent illi sinus recti in Quadrante ad totidem rectas radio æquales & parallelas in Quadrato circumscripto.

Pariter, si ponatur radius partium 10; erunt sinus recti $\sqrt{:100-0:}+\sqrt{:100-1:}+\sqrt{:100-4:}+\sqrt{:100-9:}+\sqrt{:100-16:}+\sqrt{:100-25:}+\sqrt{:100-36:}+\sqrt{:100-49:}+\sqrt{:100-64:}+\sqrt{:100-81:}+\sqrt{:100-100:}$ Hoc est $\sqrt{100}+\sqrt{99}+\sqrt{96}+\sqrt{91}+\sqrt{84}+\sqrt{75}+\sqrt{64}+\sqrt{51}+\sqrt{36}+\sqrt{19}+\sqrt{0}$. Vel etiam $10+3\sqrt{11}+4\sqrt{6}+\sqrt{91}+2\sqrt{21}+5\sqrt{3}+8+\sqrt{51}+6+\sqrt{19}+0$. quod aggregatum non aliter abbreviari potest quam pro $10+8+6+0$ substituendo 24; ut ratio istius aggregati ad radicem maximam toties positam, puta ad $11\sqrt{100}$ vel 11×10 vel 110, non explicatius efferri potest quam $\frac{24+3\sqrt{11}+4\sqrt{6}+\sqrt{91}+2\sqrt{21}+5\sqrt{3}+\sqrt{51}+\sqrt{19}}{110}$;

quæ minus adhuc videtur intelligibilis quam ubi ponitur radius partium pauciorum, puta *6*.

Atq; eodem modo quo plures supponuntur radii partes eo intricatior necesse est ut fiat rationis explicatio, quæ quidem fere omnium radicum repetitionem postulat, cum paucæ admodum, raro quidem, & non nisi fortuitò quasi, occurrant, quæ vel rationales sint vel quidem invicem commensurabiles. Et propterea si supponatur Radius partium infinitarum, ratio proveniens etiam minus adhuc videatur explicabilis.

Idem contingeret, si, juxta tenorem prop, 135. ponatur circuli Diameter partium 12. Ita enim essent Sinus recti correspondentes in Semicirculo, $\sqrt{:0 \times 12 - 0:} + \sqrt{:1 \times 12 - 1:} + \sqrt{:2 \times 12 - 4:} + \sqrt{:3 \times 12 - 9:} + \sqrt{:4 \times 12 - 16:} + \sqrt{:5 \times 12 - 25:} + \sqrt{:6 \times 12 - 36:} + \sqrt{:7 \times 12 - 49:} + \sqrt{:8 \times 12 - 64:} + \sqrt{:9 \times 12 - 81:} + \sqrt{:10 \times 12 - 100:} + \sqrt{:11 \times 12 - 121:} + \sqrt{:12 \times 12 - 144}$. Hoc est $\sqrt{:0 - 0:} + \sqrt{:12 - 1:} + \sqrt{:24 - 4:} + \sqrt{:36 - 9:} + \sqrt{:48 - 16:} + \sqrt{:60 - 25:} + \sqrt{:72 - 36:} + \sqrt{:84 - 49:} + \sqrt{:96 - 64:} + \sqrt{:108 - 81:} + \sqrt{:120 - 100:} + \sqrt{:132 - 121:} + \sqrt{:144 - 144}$. Hoc est $\sqrt{0} + \sqrt{11} + \sqrt{20} + \sqrt{27} + \sqrt{32} + \sqrt{35} + \sqrt{36} + \sqrt{35} + \sqrt{32} + \sqrt{27} + \sqrt{20} + \sqrt{11} + \sqrt{0}$. Vel, propter easdem radices bis positas, $2\sqrt{0} + 2\sqrt{11} + 2\sqrt{20} + 2\sqrt{27} + 2\sqrt{32} + 2\sqrt{35} + \sqrt{36}$ Vel, reducendo irrationalitatem ad minimos terminos, $0 + 2\sqrt{11} + 4\sqrt{5} + 6\sqrt{3} + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{35} + 6$. Ratio igitur quam habet hoc aggregatum ad totidem radices maximæ æquales, puta ad $13\sqrt{36}$ vel $13 + 6$, hoc est ad 78, non explicatius efferri poterit quam $\frac{2\sqrt{11} + 4\sqrt{5} + 6\sqrt{3} + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{35} + 6}{78}$

vel $\frac{\sqrt{11} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + \sqrt{35} + 3.}{39}$ Atq; ea est ratio quam habet aggregatum istorum Sinuum rectorum in Semicirculo, ad totidem rectas radio æquales & parallelas in Parallelogrammo huic semicirculo circumscripto. Si autem sinus maximus $\sqrt{36} = 6$ supponatur bis poni (pro utroq; scilicet quadrante semel) atq, eapropter pro 13 æqualibus, ponantur 14, (puta, pro $13 + 6 = 78$ ponatur $14 + 6 - 84$,) eadem erit hæc ratio cum ea quam supra provenire diximus posito radio partium sex.

Pariter, si Diameter ponatur partium 20, sinus recti in Semicirculo erunt $\sqrt{:0 \times 20 - 0:} \times \sqrt{:1 + 20 - 1:} \times \sqrt{:2 + 20 - 4}$

+√

$+\surd:3\times20-9:+\surd:4\times20-16:+\surd:5\times20-25:+\surd:6\times20-36:$ $+\surd:7\times20-49:+\surd:8\times20-64+\surd:9\times20-81:+\surd:10\times20-100:+\surd:11\times20-121+\surd:12\times20-144:+\surd:13\times20-169:$ $+\surd:14\times20-196:+\surd:15\times20-225:+\surd:16\times20-256:+\surd:$ $17\times20-289:+\surd:18\times20-324:+\surd:19\times20-361:+\surd:$ $20\times20-400$. Hoc eſt, $\surd0+\surd19+\surd36+\surd51+\surd64+\surd75$ $+\surd84+\surd91+\surd96+\surd99+\surd100+\surd99+\surd96+\surd91+\surd84$ $+\surd75+\surd64+\surd51+\surd36+\surd19+\surd0$. Vel $2\surd0+2\surd19+2\surd36$ $+2\surd51+2\surd64+2\surd75+2\surd84+2\surd91+2\surd96+2\surd99+\surd100$. (Nempe iidem ipſi qui ſupra in quadrante habentur poſito radio partium 10, bis hic poſiti; niſi quod ſinus maximus utrique quadranti communis non repetatur.) Vel etiam $0+2\surd19+12+2\surd51+16+10\surd3+4\surd21+2\surd91+8\surd6+6\surd11+10$. Vel denique (quia $0+12+16+10=38$) $38+2\surd19+2\surd51$ $+10\surd3+4\surd21+2\surd91+8\surd6+6\surd11$. Adeoque ratio quam habet aggregatum illud radicum, ad maximam toties poſitam (puta $21\times10=210$)

$$\text{eſt}\quad \frac{38+2\surd19+2\surd51+10\surd3+4\surd21+2\surd91+8\surd6+6\surd11}{210}$$

$$\text{vel}\quad \frac{19+\surd19+\surd51+5\surd3+2\surd21+\surd91+4\surd6+3\surd11.}{105}$$

Et quidem quo plures ponantur Radii vel Diametri partes, eò minus videtur explicabilis ratio ſinuum omnium ad maximum toties ſumptum: adeoq; ſi ſupponantur radii vel diametri partes infinitæ, (quod ad ſcopum noſtrum faciendum videtur,) ratio ſinuum omnium ad radium toties poſitum, hoc eſt, Quadrantis vel Semicirculi ad Quadratum vel Parallelogrammum circumſcriptum, videatur penitus inexplicabilis, ſaltem niſi ejuſmodi explicatio ſufficere judicanda ſit, qualem prop. 121 & 135. exhibuimus.

His itaq; perpenſis, prope abfuit ut rem quaſi penitus conclamatam ulterius inveſtigando deſiſterem. Id unicum quod ſpem fecit hoc erat. Nempe quod eâdem difficultate non obſtante, in radicibus quadraticis, cubicis, biquadraticis &c. numerorum Arithmetice proportionalium res non male ſucceſſit.

Nam, verbi gratia, ſi ſeries Subſecundanorum aliquouſq; continuetur, $\surd0+\surd1+\surd2+\surd3+\surd4+\surd5+\surd6$, ipſius ratio ad maximum toties poſitum, puta $7\surd6$, non videtur aliàs explicabilis

plicabilis quam $\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$, vel, $\frac{0+1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$, vel saltem (propter $0+1+2=3$) $\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$; nisi forsan placeat tam antecedentem quam consequentem rationis ducere in $\sqrt{6}$, ut prodeat ratio $3\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}+\sqrt{36}$, ad 7×6; vel potius $3\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}+6$, ad 7×6. Et similiter in aliis ejusmodi seriebus.

Verum si eadem series supponatur in infinitum continuanda, prodibit tandem ratio $\frac{2}{3}$, vel 2 ad 3, aut 1 ad $1\frac{1}{2}$. ut dictum est prop. 53, 54. ipsa quidem infinitate (quod mirum videatur) irrationalitatem destruente.

Et similiter in subtertianis, subquartanis, &c. continget, ut patet ex superius traditis prop. 54, 59.

Cum itaq;, illa difficultate non obstante, quadratura Parabolæ & ab aliis antehac & a nobis etiam nostra methodo, sed & Paraboloideos cujusvis quadratura (eâdem manente difficultate) a nobis in superioribus satis feliciter tradita sit; non plane omnis aberat spes rationem tandem inveniendi quam Radicum universalium (seriei vel auctæ vel mulctatæ) series habeat ad seriem æqualium, & quidem si non universaliter, in quibusdam saltem, quadantenus explicandi; fortassis etiam in illis ipsis quæ Circuli vel Ellipseos, & quæ Hyperbolæ quadraturam attingunt nonnihil proficere.

Ut autem quid deinceps sit inquirendum rectiùs perspiciatur, meminisse licet nos (inter alia) circuli (vel etiam Ellipseos cujusvis) quadraturam huc usq; perduxisse.

Nempe, per prop. 118, & 121, si rationum series illa $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{48}{105}$, $\frac{384}{945}$, &c. interpolari poterit; ratio illa quæ primæ & secundæ ponenda est intermedia, est ea quam habet Circuli Quadrans ad Quadratum Radii, vel Circulus ipse ad quadratum Diametri.

Item, per prop 133, & 135, si interpolari poterit rationum series ista $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{140}$, $\frac{1}{630}$, &c. ratio illa quæ primæ & secundæ ponenda est intermedia, est ea quam habet semicirculus ad Quadratum diametri.

Sed & insuper, si interpolari poterint numeri diagoniales tabellæ

bellæ prop. 132 nempe 1, 2, 6, 20, 70, &c. ratio quam habet unitas ad numerum eorundem primo & secundo intermedium, est ea quam habet Circulus ad Quadratum Diametri: Et Ellipsis ad Parallelogrammum circumscriptum. Ut deinceps probabitur, ex prop. seq.

PROP. CLXVI. *Theorema.*

SI series infinita Æqualium, Primanorum, Secundanorum, aut Tertianorum, &c. respective ducatur in seipsam inverse positam; atq; eadem etiam in seipsam directe positam: erit aggregatum rectangulorum illorum, ad aggregatum horum; ut 1 ad 1, 2, 6, 20, 70, &c. numeros diagoniales Tabellæ prop. 132.

Nam si series Æqualium in seipsam (sive directe sive inverse positam) respective ducatur, fit series Æqualium: cui convenit ratio 1 ad 1.

Si autem series Primanorum in seipsam directe positam sic multiplicetur; fiet series Secundanorum; si series Secundanorum sic ducatur, fiet series quartanorum; si series Tertianorum, fiet series Sextanorum; &c. per prop. 73. Quibus conveniunt rationes $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{9}$ &c. per prop. 44 vel 64.

Si autem Series Primanorum respective ducatur in seipsam inversam; (puta series $a, b, c,$ &c. in seriem $D - a$, $D - b$, $D - c$, &c.) Item series Secundanorum in seipsam inversam, (puta series a^2, b^2, c^2, &c. in seriē $Q : D - a$. $Q : D - b$ $Q : D - c$ &c. vel $D^2 - 2aD + a^2$. $D^2 - 2bD + b^2$. $D^2 - 2cD + c^2$. &c.) Item series Tertianorum in seipsam inversam; (puta series a^3, b^3, c^3, &c. in seriem $C : D - a$. $C : D - b$. $C : D - c$. &c.) Et sic de reliquis; Rationes ipsis convenient, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{140}$: $\frac{1}{630}$ &c. per prop. 133, 134.

Ratio igitur rationum harum ad rationes illas, ea est quam habet 1 ad numeros 1, 2, 6, 20, 70, &c. nempe numeros diagoniales tabellæ prop. 132 (ut ex calculo patet) Quod erat demonstrandum.

$\frac{1}{1}$)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1}$
$\frac{1}{3}$)	$\frac{1}{6}$	($\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}$)	$\frac{1}{30}$	($\frac{1}{6}$
$\frac{1}{7}$)	$\frac{1}{140}$	($\frac{1}{20}$
$\frac{1}{9}$)	$\frac{1}{630}$	($\frac{1}{70}$

SCHOL.

SCHOLIUM.

Notandum hic, in ſerie rationum $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$, &c. Denominatores ſive conſequentes ſunt Arithmetice proportionales; adeoq; ſi in ſingulis intervallis totidem eſſent interponendæ rationes, eſſent illæ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$, &c. juxta analogiam Arithmetice-proportionalium, & leges Prop. 44, & 64.

In ſerie vero rationum $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}$, &c. conſequentes 1, 6, 30, 140, 630, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{6 \times 10 \times 14 \times 18 \text{ \&c.}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \text{ \&c.}}$ vel $1 \times \frac{12 \times 20 \times 28 \times 36 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ \&c.}}$ (ubi fractionum tam numeratores quam denominatores ſunt Arithmetice proportionales.) Et propterea (juxta progreſſionis illius analogiam) ſi numerus primo & ſecundo interponendus dicatur A; fient reliqui, reliquis intervallis interponendi, continua multiplicatione numerorum $A \times \frac{16 \times 24 \times 32 \text{ \&c.}}{3 \times 5 \times 7 \text{ \&c.}}$ (Et quidem numerus primo anteponendus $\frac{1}{2}$ A; juxta eandem analogiam. In præcedenti autem, & propterea in mox ſequenti ſerie numerus primo anteponendus evaneſcit; nempe, illic in nihil, iſtic in infinitum.)

In ſerie deniq; rationum $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}, \frac{1}{70}$, &c. Conſequentes 1, 2, 6, 20, 70. &c. fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{2 \times 6 \times 10 \times 14 \text{ \&c.}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \text{ \&c.}}$ vel $1 \times \frac{4 \times 12 \times 20 \times 28 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ \&c.}}$ (ubi, ut ſupra tam numeratores quam denominatores fractionum ſunt Arithmetice-proportionales.) Et propterea juxta progreſſionis analogiam) ſi numero primo & ſecundo interponendus dicatur α, fiunt reliqui continua multiplicatione numerorum $\alpha \times \frac{8 \times 16 \times 24 \text{ \&c.}}{3 \times 5 \times 7 \text{ \&c.}}$

PROP. CLXVII. *Theorema.*

IDeoq; , Si ſeries infinita Subſecundanorum (puta $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c.) reſpective ducatur in ſeipſam inverſam (puta $\sqrt{:D - a}$. $\sqrt{:D - b}$. $\sqrt{:D - c}$ &c.) atq; eadem etiam in ſeipſam directe poſitam (puta ſeries $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c. in ſeriem $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ &c)

&c.) erit aggregatum rectangulorum illorum (puta $\sqrt{:aD - a^2:} + \sqrt{:bD - b^2:} + \sqrt{:cD - c^2:}$ &c.) ad aggregatum horum (puta $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2}$ &c. vel $a + b + c$ &c.) ut unitas ad numerum intermedium, numeris diagonialibus 1, 2, in Tabella prop. 132 interponendum.

Sequitur ex præcedente. Nam series Subsecundanorum est seriei Æqualium, & seriei Primanorum intermedia. (ut patet ex dictis prop. 64.)

Series autem Subsecundanorum in seipsam directe positam (puta $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c. in $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ &c.) est series Primanorum (puta $\sqrt{a^2}, \sqrt{b^2}, \sqrt{c^2}$ &c vel a, b, c, &c.) cui convenit ratio $\frac{1}{2}$ per prop. 44, vel 64. Et propterea, si ratio quæ convenit seriei Primanorum in seipsam inversam ductæ (intermedia nempe rationibus $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}$,) dicatur $\frac{1}{2\square}$: Ratio rationis hujus $\frac{1}{2\square}$ ad illam $\frac{1}{2}$, (puta $\frac{1}{2}$) $\frac{1}{2\square}$ ($\frac{1}{\square}$, erit per præced.) ea quam habet 1 ad numerum inter 1 & 2 interponendum, in serie digonialium 1, 2, 6, 20, 70, &c. tabellæ prop. 132. *Qui numerus igitur in posterum dicatur* □. Estq; semissis numeri inter 1 & 6 interponendi in serie 1, 6, 30, 140, 630, &c.

PROP. CLXVIII. *Corollar.*

ET propterea; *Circulus ad quadratum diametri, est ut* 1 *ad* □, *numerum nempe inter* 1 *&* 2 *interponendum in serie diagonalium* 1, 2, 6, 20, 70, *&c. tabellæ prop.* 132.

Cum enim (per prop. 133, 135.) Semicirculus ad Quadratum diametri sit ut 1 ad 2 □ (numerum intermedium inter 1 & 6 in serie 1, 6, 30, 140, 630, &c.) erit circulus (quippe semicirculi duplus) & 1 ad □, (numerum intermedium inter 1 & 2 in serie 1, 2, 6, 20, 70, &c.) per præced,

Et quidem eadem ratio $\frac{1}{\square}$; ea est, quæ intermedia ponenda est inter $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{3}$, in serie $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$ &c. prop. 118, & 121. ut & deinceps etiam ulterius patebit.

SCHOL.

SCHOLIUM.

Cum igitur (ut ad ea quæ monuimus in Schol. prop. 165. tandem redeamus) res eò redacta sit, ut si possimus rationes illas interpolare (prop. 118. memoratas) $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{48}{105}$, &c. hoc est, quas habet 1 ad 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{105}{48}$, &c. (hoc est, ad 1, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{7}{8}$, $2\frac{9}{48}$, &c.) qui termini consequentes fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1\times\frac{3\times5\times7\times9\ \&c}{2\times4\times6\times8\ \&c.}$

Vel etiam illas (prop. 133.) $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{140}$, &c. quarum termini consequentes 1, 6, 30, 140, &c. fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1\times\frac{6\times10\times14\times18\ \&c.}{1\times2\times3\times4\ \&c.}$

Vel deniq; si illas $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{20}$, &c; nempe quas habet 1 ad 1, 2, 6, 20, &c. (numeros diagoniales tabellæ prop. 132.) qui fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1\times\frac{2}{1}\times\frac{6}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{14}{4}$ &c.

Si, inquam, harum rationum seriem unam aliquam interpolare possimus, habebitur accuratissima circuli quadratura. Et quidem in prima & tertia interponenda erit (post primam) ratio $\frac{1}{\square}$: in secunda vero ratio $\frac{1}{2\square}$. Adeoq; interpolatione in una præstita, in reliquis etiam non difficulter fiet.

Placet igitur (ut inde exordium sumamus, unde major elucet spes quæsitum consequendi) Tabellam illam prop. 132. aggredi, ut videamus numquâ possimus arte illam interpolare: Adeóq;, ipsam repetere intermissis alternatim spaciis, (ut quæ istic sunt series prima, secunda, tertia, &c. sint hic secunda, quarta, sexta, &c.) Et paulo accuratius examinare; quod sequentibus aliquot propositionibus fiet.

PROP. CLXIX. *Theorema.*

NUmeri omnes Tabellæ prop. 132. sunt figurati. Nempe, qui in illius serie primâ (sive erecta sive transversa) sunt monadici; qui in tertia, Triangulares; qui in quarta, Pyramidales; & sic deinceps, puta Trianguli pyramidales, Pyramidipyramidales, &c.

Patet hoc inſpecta tabella: & comparatis (ſi opus;) iis, quæ de numeris figuratis apud Maurolicum aut alios occurrunt. Nominibus autem illis utor, quibus Dn. Oughtredus noſtras (Mathematicus eximius) in ipſius *Clavi Mathematicæ* cap. 17. n. 11.

Quæ autem ſunt in illa tabella prop. 132. ſeries prima, ſecunda, tertia, &c. jam in eadem hic repetita fiunt (propter intermiſſa ſpatia, numeris, ſi fieri poſſit, replenda) ſecunda, quarta, quinta, &c.

Numeri		Monadici.		Laterales.		Triangulares.		Pyramidales.		Trian: pyram.		Pyr. pyram.
Monadici.		1		1		1		1		1		1
			□									
Laterales.		1		2		3		4		5		6
Triangulares		1		3		6		10		15		21
Pyramidales		1		4		10		20		35		56
Triangulipyram.		1		5		15		35		70		126
Pyramidipyram.		1		6		21		56		126		252

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

PROP. CLXX. *Theorema.*

SEries duæ, in exposita Tabella, nempe Monadicorum, & Lateralium, facile interpolari possunt (locis interponendis quotlibet;) interpositis scil. illic quot opus est, unitatibus, hic, totidem mediis Arithmeticis.

Puta, si placet unum ubiq; numerum interponere; erit monadicorum series interpolata, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. Lateralium vero $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6. vel $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{11}{2}$, 6.

Ratio patet; quoniam numeri sunt illic æquales, hic Arithmetice proportionales.

SCHOLIUM.

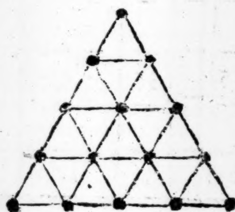
Reliquæ autem series non ita facile interpolantur, nisi invento prius cujusq; seriei proprio charactere; quod sequentibus propositionibus investigabimus.

PROP. CLXXI. *Lemma.*

PRopositum sit inquirere, quam habeant rationem numeri Triangulares, ad suum latus.

Illud hoc progressu investigabimus.

1. Si puncta totidem, quot numerus aliquis triangularis postulat, debita forma triangulari disponantur, & rectis conjungantur, ut in apposito schemate; manifestum est totam figuram triangularem in tot triangula dividi (tam toti quam inter se similia) quot est quadratum numeri lateralis unitate minuti. (quod si opus sit, demonstrari potest ex 19 e 6.) Adeoq; si ipsius numerus lateralis sit *l*, erit numerus triangulorum parti-



particularium $Q : l - 1 : = l^2 - 2l + 1$.

2. Quum horum triangulorum quodlibet habeat tres angulos, erit horum angulorum numerus $3l^2 - 6l + 3$.

3. Notandum est ad totius figuræ tria puncta angularia, non nisi tot angulos apponi (nempe ad singula unum:) & propterea illi tres anguli occupant tria puncta, seu $3P$.

4. Ad reliqua puncta in lateribus, terminantur anguli terni; quorum igitur quilibet occupat trientem puncti. Sunt autem intermedia illa puncta lateralia, in quolibet latere $l - 2$, ergo in omnibus $3l - 6$, (nempe propter tria latera;) & anguli ad hæc intermedia puncta adjacentes $9l - 18$, (propter ternos angulos ad singula puncta;) quorum quilibet occupat trientem puncti, seu $\frac{1}{3}P$; adeoque omnes occupant $\frac{9l - 18}{3}P$.

5. Ad reliqua quæ supersunt puncta, intra aream figuræ, terminantur anguli seni (ad quodlibet nempe sex,) qui propterea occupant sextantem puncti. Quot autem illi sunt anguli, sic colligitur. Totus angulorum numerus est (ut diximus) $3l^2 - 6l + 3$: Hinc si subducantur 3 (ad totius figuræ angulos positi,) & $9l - 18$ (ad puncta lateralia adjacentes) manebunt $3l^2 - 15l + 18$; qui est numerus angulorum ad puncta intra aream terminatorum. Cum verò horum quilibet occupat sextantem puncti, sive $\frac{1}{6}P$; occupabunt hi omnes $\frac{3l^2 - 15l + 18}{6}P$.

6. Deniq; , si simul addantur puncta sic inventa; nempe $3P$ & $\frac{9l - 18}{3}P$ & $\frac{3l^2 - 15l + 18}{6}P$; erit horum aggregatum $\frac{l^2 + l}{2}$ Puncta; numerus punctorum omnium: Hoc est, numerus triangularis cujus latus l. Ideoq; ----

PROP. CLXXII. *Theorema.*

Latus numeri cujusvis Triangularis ad ipsum numerum, est ut l ad $\frac{l^2 + l}{2}$

Ut ostensum est in præced.

 Adeoq;

Adeoq; , dato latere l dabitur numerus Triangularis isti lateri conveniens, puta $n = \frac{l^2 + l}{2}$.

Et contra, Dato numero Triangulari, invenietur ipsius latus.

Nempe, resolvendo hanc Æquationem $2n = l^2 + l$, erit $\sqrt{:\frac{1}{4} + 2n:} - \frac{1}{2} = l$.

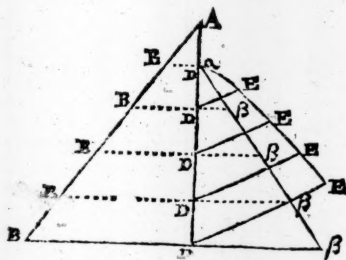
PROP. CLXXIII. *Coroll.*

SI Hyperbolæ Diameter transversa sit 1, *& Latus rectum* $\frac{1}{2}$; *sumptis diametris (puncto applicationis & vertice interceptis)* 1, 2, 3, 4, 5, *&c. Ordinatim-applicatarum quadrata erunt* 1, 3, 6, 10, 15. *&c. nempe numeri triangulares, cujus latera sunt* 1, 2, 3, 4, 5, *&c.*

Probatur per 17 vel 33 prop. Con. Sect. nost. Hyperbolam ipsam exhibebit figura prop. seq.

PROP. CLXXIV. *Corollarium.*

ITem, si fiant ad eandem rectam AαD *duo triangula similia,* αDβ, ADB; *sitq; ut* 1 *ad* $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *sic* AD *ad* DB *&* αD *ad* Dβ; *& sumantur æquales* Aα = 1 = αD = DD *&c. Rectangula* BDβ, BDβ, *&c. erunt ad invicem ut* 1, 3, 6, 10, *&c. numeri triangulares, quorum latera sunt* αD, αD, *&c. Mediæ vero proportionales inter* BD, Dβ; DB, Dβ *&c, sunt ordinatim-applicatæ in Hyperbola* ADE; *cujus diameter transversa* Aα, *& latus rectum* αB, *vel ipsi æquale.*



Patet ex calculo. Nam rectangulorum BDβ, primum erit $\sqrt{\frac{1}{2}} \times 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 1$. Secundum $2\sqrt{\frac{1}{2}} \times 3\sqrt{\frac{1}{2}} = 3$. Tertium $3\sqrt{\frac{1}{2}}$

×4√

$\times 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 6$. Quartum $4\sqrt{\frac{1}{2}} \times 5\sqrt{\frac{1}{2}} = 10$. Et sic deinceps. Quæ sunt quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola, per præced. ideoq; Mediæ proportionales puta $\sqrt{1}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, &c. ipsæ ordinatim-applicatæ.

SCHOLIUM.

Si autem sumpta fuissent $AD = DB$ & $\alpha D = D\beta$, tum rectangula fuissent $1 \times 2 = 2$. $2 \times 3 = 6$. $3 \times 4 = 12$. $4 \times 5 = 20$, &c. dupla numerorum triangularium: & Mediæ proportionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, &c. essent ordinatim-applicatæ in Hyperbola, cujus tam latus rectum quam latus transversum sit 1. ut, ex dictis, consideranti patebit.

PROP. CLXXV. *Theorema.*

Series numerorum Triangularium, in præmissa tabella, commode interpolari poterit, si ipsorum numeris lateralibus tot interponantur mediæ arithmeticæ, quot opus est, & ex iis formentur numeri triangulares, juxta prop. 172.

Puta si in serie numerorum triangularium 1, 3, 6, 10, 15, &c. unus ubiq; interponendus est numerus; eorum latera 1, 2, 3, 4, 5, &c. mediis arithmeticis debite interpolata erunt $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, &c. quibus lateribus (per prop 172.) respondent numeri triangulares, $\frac{3}{8}$, 1, $1\frac{7}{8}$, 3, $4\frac{3}{8}$, 6, $7\frac{7}{8}$, 10, $12\frac{3}{8}$, 15, $17\frac{7}{8}$, 21, &c. Vel $\frac{3}{8}$, 1, $\frac{15}{8}$, 3, $\frac{35}{8}$, 6, $\frac{63}{8}$, 10, $\frac{99}{8}$, 15, $\frac{143}{8}$, 21, &c. Vel deniq; $\frac{3}{8}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{24}{8}$, $\frac{35}{8}$, $\frac{48}{8}$, $\frac{63}{8}$, $\frac{80}{8}$, $\frac{99}{8}$, $\frac{120}{8}$, $\frac{143}{8}$, $\frac{168}{8}$, &c. quorum quidem differentiæ sunt Arithmetice-proportionales.

Pari modo, si interponendi sint in singulis intervallis duo loci; prodirent numeri, $\frac{2}{9}$. $\frac{5}{9}$. 1. $\frac{14}{9}$. $\frac{20}{9}$. 3. $\frac{35}{9}$. $\frac{44}{9}$. 6. $\frac{65}{9}$. $\frac{77}{9}$. 10. &c. Vel $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{20}{9}$, $\frac{27}{9}$, &c. quorum item differentiæ sunt Arithmetice proportionales.

PROP.

PROP. CLXXVI. *Lemma.*

PRopositum sit inquirere quam habeant rationem numeri Pyramidales, ad latus suum.

Liceret & hanc propositionem pari progressu investigare, quo in prop. 171 usus sum: (observato interim discrimine quo differt debita numeri pyramidalis dispositio a dispositione numeri Triangularis:) quod qui volet experiri poterit. Verum cum non ita facile esset lectori concipere debitum punctorum situm in pyramide (ut quæ non omnia supponenda sunt in eodem plano) & angulorum solidorum ad ea puncta positionem: satius videtur illud hac quæ sequitur methodo præstare. (Quæ quidem, nisi mallem utrumq; modum ostendisse, adhiberi potuisset etiam ad prop. 171.)

1. Numerus Pyramidalis æquatur aggregato numerorum triangularium (ut patet ex dictis ad prop. 130. & 132.) nempe ab unitate ad numerum Triangularem sibi collateralem inclusive. (sicut & numeri Triangulares fiunt aggregatione Lateralium; & Laterales, Monadicorum; ut & Triangulipyramidales, Pyramidalium; & sic deinceps.)

2 Est autem lateris l, numerus quilibet Triangularis $\frac{l^2+l}{2}$ per prop. 171.

3. Ergo, sumptis lateribus 1, 2, 3, 4, &c; vel (eorum loco) a, b, c, d, &c; summa horum a^2+a, b^2+b, c^2+c, d^2+d, &c, erit duplum aggregati Triangularium; (quorum numerus erit æqualis lateri maximi:) & hujus propterea semissis, erit numerus Pyramidalis, cujus latus æquatur lateri maximi Triangularium.

$$2\left)\begin{array}{c} a^2+a \\ b^2+b \\ c^2+c \\ d^2+d \\ \&c \\ \hline \text{Num. Pyramid.} \end{array}\right.$$

4. Est igitur numerus Pyramidalis semissis aggregati duarum serierum; eousq; ab unitate continuatarum, donec numerus locorum æquetur lateri numeri Pyramidalis quæsiti, quod supponatur l: Quibus si præponatur locus alter o^2+o, (ut series intelligantur ab o inchoatæ,) fiet harum numerus $l+1$. Et utriusq;

utriusq; seriei summa seorsim innotescet per prop. 2 & 20.

5. Nempe, summa seriei primanorum $0 + a + b + c.$ &c, quorum ultimum est l, numerus locorum $l + 1$; erit $\frac{l+1}{2} l$. per prop. 2.

6 Et summa seriei secundanorum $0 + a^2 + b^2 + c^2$ &c, quorum ultimum est l^2 & numerus locorum $l + 1$; erit $\frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6l} l^2$ vel $\frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6} l$. per Prop. 20.

7 Utriusq; igitur summæ aggregatum, (puta $\frac{l+1}{2} l + \frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6} l$,) nempe $\frac{3l^2 + 3l + 2l^3 + 2l^2 + l^2 + l}{6} = \frac{2l^3 + 6l^2 + 4l}{6}$, est aggregatum duarum serierum; cujus aggregati semissis $\frac{l^3 + 3l^2 + 2l}{6}$ est numerus pyramidalis cujus latus l. Ideoq; -----

PROP. CLXXVII. *Theorema.*

LAtus numeri cujusvis Pyramidalis ad ipsum numerum suum, est ut l ad $\frac{l^3 + 3l^2 + 2l}{6}$.

Ut ostenditur est in præced.

At, dato numero pyramidali n, non innotescit ipsius latus, nisi resolvendo Æquationem Cubicam $6n = l^3 + 3l^2 + 2l$.

PROP. CLXXVIII. *Theorema.*

SEries numerorum Pyramidalium, in præmissa tabella commode interpolari poterit; si ipsorum numeris lateralibus tot interponantur mediæ arithmeticæ quot opus est, & ex iis formentur numeri pyramidales, juxta prop. præced.

Puta, si numerorum pyramidalium 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c. latera

latera 1,2,3,4,5,6, &c. si impolata sint $\frac{1}{2}$, 1, 1 $\frac{1}{2}$, 2, 2 $\frac{1}{2}$, 3 3 $\frac{1}{2}$, 4, 4 $\frac{1}{2}$, 5, 5 $\frac{1}{2}$, 6, &c. hisce lateribus respondebit serie pyramidalium $\frac{5}{16}$, 1, 2 $\frac{3}{16}$, 4, 6 $\frac{9}{16}$, 10, 14 $\frac{7}{16}$, 20, 26 $\frac{13}{16}$, 35 44 $\frac{11}{16}$, 56, &c. vel etiam $\frac{5}{16}$, 1, $\frac{35}{16}$, 4, $\frac{105}{16}$, 10, $\frac{231}{16}$, 20, $\frac{429}{16}$, 35, $\frac{715}{16}$, 56, &c. Vel potius $\frac{15}{48}$, 1, $\frac{105}{48}$, 4, $\frac{315}{48}$, 10, $\frac{693}{48}$, 20, $\frac{1287}{48}$, 35, $\frac{2145}{48}$, 56, &c.

PROP. CLXXIX. *Lemma.*

PRopositum sit inquirere, quam habeant rationem numeri Triangulipyramidales ad latus suum.

Præstabitur hoc eâdem methodo quâ prop. 176. Nempe.

1. Numerus Triangulipyramidalis æquatur aggregato numerorum omnium Pyramidalium (intellige, quorum latera sunt numeri integri, nam de interpolatis hic non agitur,) ab unitate ad numerum sibi collateralem, inclusive.

2. Est autem lateris l, numerus Pyramidalis $\frac{l^3 + 3l^2 + 2l}{6}$. per prop. 177.

3. Ergo, sumptis lateribus 1,2,3, 4, &c. vel (eorum loco) a, b, c, d, &c. summa horum $a^3 + 3a^2 + 2a$, $b^3 + 3b^2 + 2b$, $c^3 + 3c^2 + 2c$, $d^3 + 3d^2 + 2d$, &c. erit sextuplum aggregati Pyramidalium (quorum omnium numerus erit æqualis lateri eorum maximi, ut patet:) & propterea hujus aggregati sextans erit numerus Triangulipyramidalis, cujus latus idem erit cum latere maximi Pyramidalium.

$$6)\ \begin{array}{l} a^3 + 3a^2 + 2a \\ b^3 + 3b^2 + 2b \\ c^3 + 3c^2 + 2c \\ d^3 + 3d^2 + 2d \\ \text{\&c.} \\ \hline \text{Num. Triangulipyram.} \end{array}$$

4. Adeoq; numerus Triangulipyramidalis est sexta pars aggregati trium serierum, eousq; ab unitate continuatarum donec numerus terminorum sit æqualis lateri numeri Triangulipyramidalis propositi, quod dicatur l: adeoq; si ipsis præponatur terminus alter $0^3 + 0^2 + 0$ (ut series intelligantur ab 0 inchoatæ) fiet numerus terminorum $l + 1$. Et singularum serierum illarum summa seorsim innotescet per prop. 2. 20. & 40.

5 Nempe

5 Nempe summa duplicatæ seriei Primanorum, $0 + 2a + 2b + 2c$, &c. cujus terminus ultimus $2l$, & numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{2}\, 2l$. per prop. 2.

6 Summa triplicatæ seriei secundanorum, $0 + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ &c, cujus terminus ultimus $3l^2$, & numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{3}\, 3l^2 + \frac{l+1}{6l}\, 3l^2$. per prop. 20.

7. Summa seriei Tertianorum, $0 + a^3 + b^3 + c^3$ &c. cujus terminus ultimus l^3, numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{4}\, l^3 + \frac{l+1}{4l}\, l^3$. per prop. 40.

8. Harum igitur summarum aggregatum, (puta $\frac{l+1}{2}\, 2l + \frac{l+1}{3}\, 3l^2 + \frac{l+1}{6l}\, 3l^2 + \frac{l+1}{4}\, l^3 + \frac{l+1}{4l}\, l^3$.) nempe

$$\frac{24l^2 + 24l + 24l^3 + 24l^2 + 12l^2 + 12l + 6l^4 + 6l^3 + 6l^3 + 6l^2}{24}$$

$$= \frac{6l^4 + 36l^3 + 66l^2 + 36l}{24}$$ est aggregatum trium illarum serierum; cujus aggregati sextans $\frac{l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l}{24}$ est numerus Triangulipyramidalis cujus latus l, Ideoq; ----

PROP. CLXXX. *Theorema.*

Latus numeri Triangulipyramidalis ad ipsum numerum, est ut l ad $\frac{l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l}{24}$.

Adeoq;, Dato latere l dabitur numerus Triangulipyramidalis, puta $n = \frac{l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l}{24}$.

Dato autem numero Triangulipyramidali, non invenitur ipsius latus nisi resolvendo hanc æquationem $24n = l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l$.

PROP. CLXXXI. *Theorema.*

SEries numerorum Triangulipyramidalium, in præmissa Tabella, commode interpolari poterit; si ipsorum numeris lateralibus, tot interponantur medii Arithmetici, quot opus est, & ex iis formentur numeri Triangulipyramidales, per præcedentem.

Puta lateribus interpolatis $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, &c. respondent numeri Triangulipyramidales, $\frac{35}{128}$, 1, $2\frac{59}{128}$, 5, $9\frac{3}{128}$, 15, $23\frac{59}{128}$, 35, $50\frac{35}{128}$, 70, $94\frac{123}{128}$, 126, &c. vel etiam $\frac{35}{128}$, 1, $\frac{315}{128}$, 5, $\frac{1155}{128}$, 15, $\frac{3003}{128}$, 35, $\frac{6435}{128}$, 70, $\frac{12155}{128}$, 126, &c. Vel potius $\frac{105}{384}$, 1, $\frac{945}{384}$, 5, $\frac{3465}{384}$, 15, $\frac{9009}{384}$, 35, $\frac{19305}{384}$, 70, $\frac{36465}{384}$, 126, &c.

PROP. CLXXXII. *Lemma.*

PRopositum sit inquirere, quam ad latus suum rationem habeant sequentium serierum numeri Figurati puta Pyramidipyramidales, &c.

Posset quidem hoc præstari eadem methodo quâ usus sum ad prop. 176, & 179. ope propositionum ibidem memoratarum, nempe pr. 2, 20, & 40, simul cum prop. 43. saltem si prius ulterius prosecuti fuerimus traditionem rationum quas habent series finitæ Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, (cum sequentibus,) ad series Æqualium; quam traditionem non nisi leviter innuimus ad prop. 43. Eam vero siquis ulterius continuandam velit, licebit ipsi vel alia quæ sibi maxime placeat methodo id præstare, vel etiam (nisi meliora ipsi occurrant auxilia) ope hujus ipsius quam jam præ manibus habemus Tabellæ, postquam viâ mox docenda ostenderimus rationes numerorum figuratorum ad suum cujuslibet latus in sequentibus seriebus investigare. Nam ut ad prop. 176 & 179, ex cognitis rationibus simplicium serierum finitarum (puta Primanorum, Secunda-

Secundanorum, Tertianorum, per prop. 2, 20, 40. ad seriem Æqualium) investigantur rationes hujus Tabellæ (puta numerorum Triangularium, Pyramidalium, Triangulipyramidalium, ad sua respective latera:) ita, vice versa, ex cognitis his licebit & illas expiscari, adeoq; illam propositionis 43 traditionem quousq; libet continuare.

Quoniam autem illud (ut diximus) non nisi leviter traditum est ad prop. 43. Nec quidem necesse sit ad præsens institutum illud ulterius prosequi, cum ex cognitis paucarum istius Tabellæ serierum characteribus (sive rationibus quas numeri isti figurati habent ad sua respective latera) sequentium etiam characteres investigandi methodus elucescat, ego illa ut faciliori jam utar, quæ hæc est.

Patet ex præmissis, character seriei numerorum.

Monadicorum 1. Lateralium l. Triangulorum $\frac{l^2+l}{2}$.

Pyramidaliū $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$. Triangulipyram. $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Patet etiam, accuratius intuenti, characteres hos fieri continua multiplicatione harum quantitatum,

$$1 \times \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \frac{l+2}{3} \times \frac{l+3}{4} \text{ \&c. vel } 1 \times \frac{l \text{ in } l+1 \text{ in } l+2 \text{ in } l+3}{1 \text{ in } 2 \text{ in } 3 \text{ in } 4}.$$

$$\text{Nam } 1 \times \frac{l+0}{1} = l.$$

$$l \times \frac{l+1}{2} = \frac{l^2+l}{2}$$

$$\frac{l^2+l}{2} \times \frac{l+2}{3} = \frac{l^3+3l^2+2l}{6}$$

$$\frac{l^3+3l^2+2l}{6} \times \frac{l+3}{4} = \frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$$

Adeoq;, si continuetur ulterius multiplicatio rationis ultimo inventæ in $\frac{l+4}{5} \times \frac{l+5}{6} \times \frac{l+6}{7}$ &c. habebimus sequentium serierum characteres.

Puta. $\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{120}$.

Item $\frac{l^6 + 15l^5 + 85l^4 + 225l^3 + 274l^2 + 120l}{120}$

Et sic deinceps, quousq; libet.

SCHOLIUM.

Diximus modo, ex rationibus sive characteribus præsentis Tabellæ continuatis, deduci posse continuationem etiam rationum illarum quas indicat prop. 43. Quoniam vero illud fortasse non erit omnibus obvium: operæ pretium duxi paucis id in transitu ostendere. Quod quidem ut sine incommodo hic possit inseri, ita quibusdam forsan ingratum non erit. Ideoq;, exempli gratia, ----

Propositum sit inquirere, quam habeat rationem series finita Quartanorum, (ab o inchoata,) ad seriem totidem maximo Æqualium.

1. Character numeri Triangulipyramidalis, (per prop. 180:) est $\frac{l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l}{24}$; Et Pyramidi-pyramidalis $\frac{l^5 + 10l^4 + 35l^3 + 50l^2 + 24l}{120}$, per prop. 182.

2. Est autem, (ut sæpius dictum est,) numerus Figuratus unius gradus (in præsenti tabella) aggregatum omniũ præcedentium in gradu sibi proximo: Adeoq; numerus Pyramidipyramidalis, est aggregatum Triangulipyramidalium.

$$24)\left\{\begin{array}{l} 0^4 + 0^3 + 0^2 + 0 \\ a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a \\ b^4 + 6b^3 + 11b^2 + 6b \\ c^4 + 6c^3 + 11c^2 + 6c \\ \&c.\ ad \\ l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l \end{array}\right\} \text{Addita.}$$

$$\frac{l^5 + 10l^4 + 35l^3 + 50l^2 + 24l \text{ Aggregatũ}}{24 \times 5 = 120}$$

3. Et propterea, sumptis lateribus 1, 2, 3, &c. vel (eorum loco) *a*, *b*, *c*, &c. (quorum maximum dicatur *l*) & formatis inde numeris Triangulipyramidalibus; Horum aggregatum erit numerus Pyramidipyramidalis ejusdem lateris, nempe $\frac{l^5 + 10l^4 + 35l^3 + 50l^2 + 24l}{120}$.

4 Sum-

4. Summa autem seriei $o + 6a + 6b + 6c$ &c, est (per prop. 2.) $\frac{l+1}{2} 6l = \frac{6l^2 + 6l}{2}$.

5. Summa seriei $o + 11a^2 + 11b^2 + 11c^2$ &c. est (per p. 20) $\frac{l+1}{3} 11l^2 + \frac{l+1}{6l} 11l^2 = \frac{11l^3 + 11l^2}{3} + \frac{11l^2 + 11l}{6} = \frac{22l^3 + 33l^2 + 11l}{6}$.

6. Summa seriei $o + 6a^3 + 6b^3 + 6c^3$ &c, est (per prop. 40.) $\frac{l+1}{4} 6l^3 + \frac{l+1}{4l} 6l^3 = \frac{6l^4 + 6l^3}{4} + \frac{6l^3 + 6l^2}{4} = \frac{6l^4 + 12l^3 + 6l^2}{4}$.

7. Hæ tres summæ in unam collectæ, sunt $\frac{6l^2 + 6l}{2} + \frac{22l^3 + 33l^2 + 11l}{6} + \frac{6l^4 + 12l^3 + 6l^2}{4} = \frac{9l^4 + 40l^3 + 60l^2 + 29l}{6}$.

8. Si igitur ex vigintiquadruplo totius aggregati, auferatur summa trium serierum.

Nempe si ex	5)	$l^5 + 10l^4 + 35l^3 + 50l^2 + 24l$.
auferatur	6)	$9l^4 + 40l^3 + 60l^2 + 29l$
Hoc est, Si ex	30)	$6l^5 + 60l^4 + 210l^3 + 300l^2 + 144l$
auferatur	30)	$+ 45l^4 + 200l^3 + 300l^2 + 145l$
Manebit summa seriei quartæ, quę est Quartanorũ	30)	$6l^5 + 15l^4 + 10l^3 + 00l^2 - 1l$

Hoc est

$$\frac{6l^5 + 6l^4 \quad + 9l^4 + 9l^3 \quad + 1l^3 + 1l^2 \quad - 1l^2 - 1l}{30}$$

Hoc est $\frac{l+1}{5} l^4 + \frac{3l+3}{10} l^3 + \frac{l+1}{30} l^2 - \frac{l+1}{30} l$

Quæ

Quæ est igitur summa seriei Quartanorum cujus terminus ultimus est l^4 numerus terminorum $l+1$.

Vel; si pro numero terminorum $l+1$, substituatur n, & propterea series æqualium nl^4; erit series Quartanorum $\frac{1}{5}nl^4 + \frac{3}{10}nl^3 + \frac{1}{30}nl^2 - \frac{1}{30}nl$. (si nempe terminus primus sit 0, secundus 1:) vel $\frac{nl^4}{5} + \frac{3nl^4}{10l} + \frac{nl^4}{30l^2} - \frac{nl^4}{30l^3}$.

9. Adeoq; series finita Quartanorum ad seriem totidem maximo Æqualium est ut $\frac{1}{5} + \frac{3}{10l} + \frac{1}{30l^2} - \frac{1}{30l^3}$ ad 1. Quod erat inquirendum.

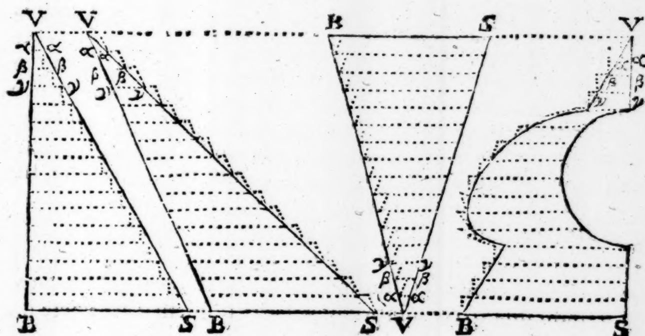
Et pari modo, his cognitis, ratio quam habet ad seriem Æqualium series Quintanorum, invenietur ope characteris in proxima præsentis tabellæ serie: Et deinde, quam habet series Sextanorum, ope characteris seriei proxime subsequentis in hac tabella; & sic deinceps quousq; libet.

Quo melius autem hoc intelligatur, operæ fortasse pretium erit, quæ jam tradita sunt, paulo distinctius aperire: Utut enim ea satis aperte tradidisse nos nobis videamur, fieri tamen potest ut lector illis minus assuetus nonnunquam forsan hæsitet.

Notandum igitur est, nos hic (ut & alibi semper, ubi de finita serie verba fiunt,) numerum terminorum assignare $l+1$ (nempe si terminus primus 0, secundus dicatur 1,) nimirum unitate majorem quam est numerus particularum ex quibus conflatur terminus maximus, hoc est, omnium differentiarum terminorum continue positorum, quarum omnium aggregato terminus maximus æquatur; sive differentiæ illæ sint æquales, ut in serie primanorum, (puta 1,1,1,1, &c, differentiæ numerorum arithmetice proportionalium,) sive crescentes, ut in serie secundanorum, tertianorum, &c. (puta 1,3,5,7,&c. differentiæ numerorum quadraticorum, vel 1,7,19,37, &c, differentiæ numerorum cubicorum; &c:) sive etiam decrescentes, ut in serie subsecundanorum, subtertianorum &c; (nam verbi gratia, differentia $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ minor est quam $\sqrt{2}-\sqrt{1}$, atq; hæc minor quam $\sqrt{1}-\sqrt{0}$: & sic in cæteris.) Harum omnium differentiarum (in qualibet serie) numerus l, unitate minor est quam numerus terminorum, ut patet; earumq; omnium aggregatum (propter termini primi 0 nullitatem) est ipse terminus

minus maximus. Ubi autem numerus terminorum dicitur n, numerus differentiarum, ſive particularum in maximo, erit $n - 1$.

Exſemplum eſto, ſeries primanorum, quale eſt Aggregatum parallelogrammorum æque-altorum figuram triangulo inſcriptam complentium: quorum ſi primum dicatur o, (quippe nullius latitudinis, utut altitudinis ejuſdem cum reliquis;)



ſecundum 1, &c. omnium numerus 16, erunt differentiæ 15, (invicem æquales, nempe 1 ubiq;) & maximum propterea 15. Adeoq; cum in ſingulis parallelogrammis altitudo communis ſit $\frac{1}{16}$ VB (in fig. 1.) & latitudinum incrementum continuum $\frac{1}{16}$ BS: Omnes ſimul altitudines, hoc eſt, figuræ inſcriptæ altitudo, VB $= \frac{16}{16}$ VB; at omnia ſimul latitudinum incrementa, hoc eſt, Baſis figuræ inſcriptæ, non BS, ſed $\frac{15}{16}$ BS, ſive BS $-\, \frac{1}{16}$ BS. Si autem uno adhuc gradu ulterius procedatur, adjuncto infra baſem uno adhuc parallelogrammo, erit quidem illius latitudo BS præciſe, ſed altitudo jam fiet auctior, nempe VB $+\, \frac{1}{16}$ VB. Si vero (ut in fig. 2.) ſumatur figura ex parallelogrammis circumſcripta, erunt tum omnium ſimul parallelogrammorum altitudines, hoc eſt, figuræ circumſcriptæ altitudo, VB (quam finge jam baſi perpendicularem,) tum latitudinum ſimul omnes particulæ, hoc eſt, baſis figuræ circum-

cum-

cumscriptæ, BS præcise: at vero jam non ab o sed 1, series inchoatur: tum series hæc supra verticem uno adhuc gradu continuetur (ut inchoetur ab o,) erit jam altitudo sic aucta $VE + \frac{1}{16} VB$, ut patet. Adeoq; figura inscripta uno infra basin gradu continuata, & figura circumscripta continuata uno gradu supra verticem, tantundem valent.

Atq; hoc totum in triangulo (atq; eádem ratione in figuris aliis, nisi quod illic incrementa sint inæqualia) satis est manifestum. Nam (præterquam quod ex jam dictis satis pateat) si in triangulo ducantur quotlibet rectæ basi parallelæ (in quarum censu & basin ipsam, & punctum verticis, censeri volumus,) eisq; totidem adjaceant parallelogramma; si illa omnia supponantur infra suas rectas jacere, erit eorum infimum subter basem, sin supra, erit supremum supra verticem; si autem supponamus rectas illas neq; in parallelogrammorum suorum summo neq; in imo jacere, sed per ipsorum media transire, tum eorum tam supremum quam infimum erit partim intra partim extra triangulum. Adeoq; quemcunq; situm habere supponantur illæ rectæ ad sua parallelogramma, figura illa ex parallelogrammis constans (dummodo ab o inchoetur) habebit vel basin suam una parte minorem, vel altitudinem una parte majorem quam habet verum illud triangulum.

Atq; hic quidem sive excessus sive defectus, quamdiu de finita serie agitur, omnino animadvertendus est: ubi autem de serie infinita agitur, tuto poterit negligi. Cum enim quo plures supponantur termini eo minor illa evadat sive basium sive altitudinum differentia, ubi in infinitum proceditur evanescet, quippe $\frac{1}{\infty}$ (pars infinite parva) habenda erit pro nihilo; (ea saltem adhibita limitatione de qua mox dicetur.) Sic, verbi gratia, si triangulo cujus altitudo A, basis B, inscribatur figura ex parallelogrammis quorum singulorũ altitudo $\frac{1}{\infty} A$, & longitudinum incrementa $\frac{1}{\infty} B$, erit inscriptæ altitudo $\infty \times \frac{1}{\infty} A = A$, basis non B sed $B - \frac{1}{\infty} B$: est enim altitudinum numerus ∞, at differentiarum $\infty - 1$. Si vero figura sic inscripta continuetur uno gradu infra basem, vel circumscripta uno gradu supra verticem, erit basis $\infty \times \frac{1}{\infty} B = B$, altitudo $A + \frac{1}{\infty} A$; quippe jam numerus incrementorum est ∞, altitudinum $\infty + 1$. Ubi igitur de serie finita agitur, per altitudinem & Basin intelligendæ sunt altitudo & basis figuræ sic adscriptæ (sive inscripta sit,

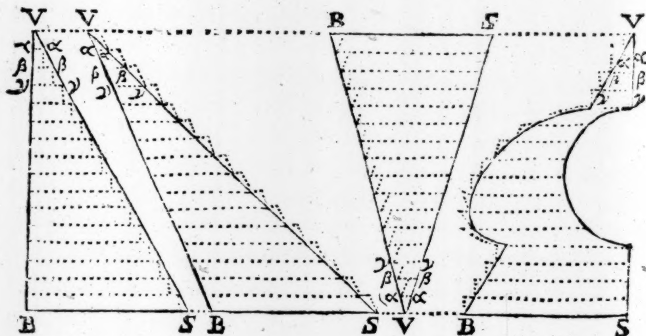
ſive circumſcripta) non autem iſtius cui adſcribitur; at vero in ſerie infinita perinde eſt ſive hujus ſive illius intelligantur, propter differentiã infinite exiguam, adeoq; evaneſcentem ſive nullam. Nam ∞, ∞ + 1, ∞ − 1, perinde ſunt. Et quemadmodũ ubi polygonum infinitorum laterum, pro circulo habetur, perinde eſt ſive inſcriptum ſive circumſcriptum intelligatur, (hoc eſt, ſive ſupponatur circuli radius æqualis rectæ quæ a centro ad angulos, ſive illi quæ a centro ad medium lateris ducitur, quarum differentia, propter latera numero infinita, eſt infinite exigua:) ſic in adſcriptionibus noſtris perinde eſt (propter differentiam infinite parvam) an inſcriptæ an circumſcriptæ altitudo aut baſis ſumatur pro vera. Et quidem ut in polygono infinitorum laterum inſcripto & circumſcripto, latera ſupponuntur invicem æqualia, hoc eſt, ejuſdem arcus ſinus rectus & tangens æquales tam invicem quam ipſi arcui, ita & hic figuræ ex parallelogrammis inſcriptæ & circumſcriptæ tam baſes quam altitudines ſupponendæ ſunt æquales tam inter ſe quam illius cui adſcribuntur; hoc eſt, ſi accurate loqui libeat, non niſi infinite exigua ſui parte differre.

Eodem modo, in fig. prop. 5. Figura ex ſimilibus ſectoribus ſpirali inſcripta, ſi ſectorum numerus ſit finitus, erit ſeries finita, cujus terminus primus eſt 0, ultimus verò ſectorum inſcriptorum ultimus (cujus radius eſt una parte minor, quam ultimi circumſcriptorum,) omniumq; horum ſectorum arcus ſimul ſumpti, æquantur ſemiſſi arcus circuli contermini, nempe qui eſt figuræ ex ſectoribus conflatæ cõterminus, non qui cõterminus eſt veræ ſpirali; at ſi numerus ſectorum (prout ibi ſupponitur) ſupponatur infinitus, erunt adhuc omniũ ſectorum arcus ſimul ſumpti, æquales ſemiſſi arcus circuli contermini, nempe contermini figuræ ex his infinitis ſectoribus conflatæ, qui tamen vel ille ipſe eſt cum contermino veræ ſpirali, vel ipſo ſaltem infinite-exigua ſui parte (hoc eſt, nihilo,) minor. Si vero pro ſectoribus inſcriptis ſumantur circumſcripti, arcus circuli contermini erit una ſui parte augendus (ſive finita ſive infinita, pro numero ſectorum) ut ipſius ſemiſſis æqualis habeatur omnibus ſectorum arcubus ſimul ſumptis, adeoq; ſupponendus eſt incepiſſe uno gradu ante initium veræ ſpiralis, ut primi ſectoris arcus ſit 0: nam in arithmetice-proportionalibus, niſi primus terminus ſit 0, aggregatum omnium non erit æquale ſemiſſi ultimi

timi in numerum terminorum ducti.

Quod autem de his figuris ostensum est, intelligendum erit (mutatis mutandis) de quibusvis aliis, nempe numerum terminorum (si ab o incipiatur) esse unitate majorem quam est numerus differentiarum, sive particularum ex quibus maximus constat; (sive æquales sint illæ differentiæ sive inæquales;) adeoq; si adscriptæ figuræ (sive sit inscripta sive circūscripta) basis sumatur æqualis basi figuræ propositę cui adscribitur (sive continuando inscriptā uno gradu infra basin, vel circumscriptā uno gradu supra verticem) erit istius altitudo una parte major quam altitudo hujus, (sive pars illa finita sit sive infinita;) ubi autem numerus partium altitudinis hujus supponitur ∞, erit in illa $\infty + 1$; vel si hujus altitudo A, erit illius $A + \frac{1}{\infty} A$, si illius A (quod nos ponere solemus) erit hujus $A - \frac{1}{\infty} A$, quod tamen (in infinitis) tantundem valet ob differentiam infinite parvam.

Dum vero differentiam infinitè parvam, pro nulla habendam dicimus: caute hoc accipiendum est; neq; enim id ubiq; obtinet, sed aliquando lapsui occasionem præbet. Cum enim infinite parvum infinities multiplicatur, assurgit nonnunquam quantitas satis magna, nempe illa ipsa cujus illa fuit aliquota pars utut infinite parva: Nam $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$ & $\frac{1}{\infty} A \times \infty = A$.



Exsem-

Exſemplum oſtendimus in Schol. prop. 13. Si enim (in fig. 1 & 2) concluderet quis, quoniam infinitorum parallelogrammorum latera (rectam VB conſtituentia) & trapeziorum latera (complentia rectam VS) ſigillatim ſumpta non niſi differentiâ infinitè parvâ ab invicem differant (cum tam hæc quam illa ſint infinite parva, quippe $\frac{1}{\infty}$ rectarum VB, VS,) eam igitur contemnendam eſſe, ipſaq; parallelogrammorum atq; trapeziorũ latera dicenda æqualia, & propterea (cum ex æqualium æqualibus additione aggregata ſint æqualia) infinita hæc infinitis illis æqualia, hoc eſt, totam VS, æqualem eſſe toti VB: manifeſtus eſſet paralogiſmus, (in quem tamen lapſus eſt admodum proclivis, ni caveatur:) Quamvis enim differentiæ ſint ſigillatim infinite-parvæ, (nempe $\frac{1}{\infty}$ VS − $\frac{1}{\infty}$ VB) omnium tamen (numero infinitorum) aggregatum ſat notabilem habet magnitudinem, nempe VS − VB.

At interim eadem parallelogramma atq; trapezia (ſi aream ſpectemus) non modo ſigillatim ſumpta differentiam habent infinitè parvam; ſed & eorum aggregatum & aggregatum horum (hoc eſt infinita illa parallelogramma ſimul ſumpta, atq; infinita hæc trapezia) differentiâ non niſi infinite parvâ ab invicem differunt: quod de ipſorum lateribus non obtinet.

Diſcriminis ratio hæc eſt: Quoniam ubi de lateribus comparandis agitur, quamvis in binis quibuſlibet reſpective ſumptis differentia minor eſt quo major eſt omnium numerus, at in eadem ſemper ratione qua ſingulæ differentiæ minuuntur, differentiarum numerus augetur; adeoq; differentiarum aggregatum dividendo non minuitur. At ubi de areis agitur, non modo binorum (trapezii & parallelogrammi) reſpective ſumptorum differentiæ ſingulæ minuuntur ſed & omnium aggregatum; & quidem quo plures ſint differentiæ eò minus eſt omnium aggregatum, donec tandem non modo a ſingulis ſingula, (quod demonſtraſſe non ſufficeret) ſed & ab omnibus omnia differant ſpacio infinite-parvo, ut ex demonſtrationibus liquet. Atq; hæc aliquanto fuſius notaſſe operæ pretium duxi, quoniam hic loci nonnullos lapſui proclives animadverti.

Ne autem hinc aliquid periculi quis ſuſpicetur dum nos altitudinem figuræ cujuſlibet accuratam, atq; eandem aliquota ſui parte infinite-parva auctam, perinde habemus: hoc unum ſat ſecuros reddat, quod, cæteris paribus, auctio altitu-

dinis figuræ cujuslibet (sive planæ sive solidæ) non nisi in eadem ratione auget ipsius aream sive magnitudinem; adeoq; ubi altitudinis augmentum est non nisi aliquota sui parte infinite-parva, erit etiam totius figuræ non nisi in eadem ratione auctio, hoc est aliquota parte sui infinite parva, sive $\frac{1}{\infty}$ totius figuræ; quod (cum non infinities, sed semel tantum sumatur) omni assignabili spacio minus erit, adeoq; pro nullo habendum.

Sin tandem quæratur, cur ego figurarum inscriptionem, potius quam circumscriptionem, eligerim; adeoq; ab 0 potius quam ab 1, ubiq; fere inchoaverim? præsertim cum figura circumscripta (non uno gradu supra verticem continuata, ut ab 0 incipiat, sed potius ab 1) eandem habeat præcise & basin & altitudinem cum ea cui adscribitur, sive in serie primanorum, sive secundanorum, aut aliorum sequentium; item sive finita sit sive infinita series?

Dicimus: Posse quidem id quod agimus utrovis modo fieri, nempe vel per figurarum inscriptionem vel circumscriptionem (quod & supra monuimus ad prop. 43. quæ toti huic Scholio ansam dedit, cujus quidem pars magna tradi citius non potuit, ut quæ a propositione proxime præcedente dependeat,(adeoq; verbi gratia, series primanorum indifferenter designari, per 1, 2, 3, &c. vel per 0, 1, 2, &c. nam terminus primus 0 reliquorum quantitati nihil addit. Et quidem ego jam olim utroq; modo lemmata mea ordinaveram, ut ut alterutrum demonstrationibus nostris sufficeret, quapropter lectorem utroq; onerandum non censui; præsertim cum ego Series infinitas maxime spectabam, finitis vix aliter quam lemmatum instar ad infinitorum theoremata usus.

At interim figuræ circumscriptæ, si res accuratius perpendatur, non magis congruunt figuris illis quibus circumscribuntur, quam inscriptæ: Nam verbi gratia, inscripta cum exposita congruit altitudine & verticis latitudine, sed quoad basin (hoc est latitudinem in imo) differt; eadem inscripta uno infra basin gradu continuata (vel circumscripta sic continuata supra verticem) convenit expositæ quoad basin & verticis latitudinem sed quoad altitudinem differt; circumscripta vero (non continuata) convenit quidem expositæ quoad basin & altitudinem, sed non quoad latitudinem verticis, quippe in altera est 0 in altera 1.

Cum

Cum itaq; admodum se indifferenter habebant ad negotium nostrum figuræ inscriptæ & circumscriptæ; mallem ego series nostras ab o quam ab 1 inchoare: partim quod illud, utut inscriptionem potius referre videatur, utrisq; tamen accommodari possit, (ut jam dictum est,) prout vel supra verticem vel infra basin supponatur continuari: partim quod hoc pacto (propter minimi termini nullitatem) extremorum aggregatum idem sit atq; terminus maximus: præsertim vero ut possim, sine longo verborum ambitu, seriei primanorum appellatione comprehendere non modo 0, 1, 2, 3, &c, sed & 0, 2, 4, 6, &c, vel 0, 3, 6, 9, &c, vel 0, 4, 8, 12, &c, similesq; alias ab 0 inchoatas quicunq; sit terminus secundus; & sub serie secundanorum nomine, non modo 0, 1, 4, 9, &c. sed & 0, 2, 8, 18, &c, vel 0, 3, 12, 27, &c. similesq;: & pariter in seriebus sequentibus.

Siquis autem mallet ab 1, series inchoare, poterit ad hunc modum lemmata ordinare.

Ad seriem primanorum;

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1+2}{3+3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1+2+3}{4+4+4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1+2+3+4}{5+5+5+5} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5+5} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1+2+3+4+5}{6+6+6+6+6} = \frac{1}{2}$$

&c. &c.

Aut etiam,

$\frac{0+1}{2+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ $\frac{1+2}{2+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$\frac{0+1+2}{3+3+3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$ $\frac{1+2+3}{3+3+3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$

$\frac{0+1+2+3}{4+4+4+4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$ $\frac{1+2+3+4}{4+4+4+4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$

$\frac{0+1+2+3+4}{5+5+5+5+5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}$ $\frac{1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$

&c. &c.

Ad seriem Secundanorum;

$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$

$\frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$ $\frac{1+4}{9+9}=\frac{1}{3}-\frac{1}{18}$

$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$ $\frac{1+4+9}{16+16+16}=\frac{1}{3}-\frac{1}{24}$

$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$ $\frac{1+4+9+16}{25+25+25+25}=\frac{1}{3}-\frac{1}{30}$

&c. &c.

Aut etiam

$\frac{0+1}{4+4}=\frac{1}{3}-\frac{5}{24}$ $\frac{1+4}{4+4}=\frac{1}{3}+\frac{7}{24}$

$\frac{0+1+4}{9+9+9}=\frac{1}{3}-\frac{12}{81}$ $\frac{1+4+9}{9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{15}{81}$

$\frac{0+1+4+9}{16+16+16+16}=\frac{1}{3}-\frac{22}{192}$ $\frac{1+4+9+16}{16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{26}{192}$

$\frac{0+1+4+9+16}{25+25+25+25+25}=\frac{1}{3}-\frac{35}{375}$ $\frac{1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25}=+\frac{40}{375}$

&c. &c.

Ad

Ad ſeriem Tertianorum.

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+8}{8+8+8} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} \qquad \frac{1+8}{27+27} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27} = \frac{1}{4}+\frac{1}{12} \qquad \frac{0+1+8+27}{64+64+64+64} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}$$

$$\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64} = \frac{1}{4}+\frac{1}{16} \qquad \frac{1+8+27+64}{125+125+125+125} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20}$$

&c. &c.

Et ſimiliter ad ſeries ſequentes, quibus recenſendis abſtineo ne ſim prolixus. Poterit, ſi lubet, lector non magno negotio vel hæc ipſa lemmata in theoremata formare, vel alia his ſimilia ſequentibus ſeriebus aptare, ſi ad ea quæ jam tradidimus attenderit.

Sed & alius adhuc eſt (ſi varietate lector delectetur) ſeries has ordinandi modus, qui etiam aliquando non minus erit accommodus: Si nempe nec ab 0 (ut in figuris inſcriptis) nec ab 1 (ut in figuris circumſcriptis) ſed ab intermedia quantitate, puta $\frac{1}{2}$, ſeries inchoetur, (adeoq; figuram repreſentet quæ inſcriptæ & circumſcriptæ eſt intermedia, ſive major quam inſcripta & minor quam circumſcripta;) Ut ſit, verbi gratia, ſeries primanorum $\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}$ &c. vel (quod eodem recidit) $1+3+5+7$ &c. Quo caſu lemma ſic erit ordinandum, pro ſerie primanorum.

$$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}}{2+2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1+3}{4+4} = \frac{1}{2}$$

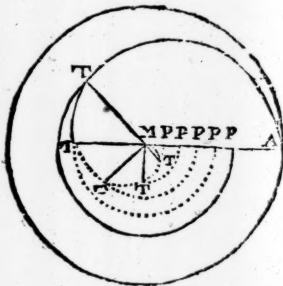
$$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}}{3+3+3} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1+3+5}{6+6+6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}}{4+4+4+4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1+3+5+7}{8+8+8+8} = \frac{1}{2}$$

&c. &c.

Atq;

Atq; hic quidem modus omnium optime convenit prop. 15, 16, ubi figuram Spirali adjacentem cum Parabolica comparamus. Nam si, in figura spirali, ductis quotlibet rectis MT angulos facientibus continuos invicem æquales, si in singulis spacies sectores inscribi supponantur, erunt eorum arcus, ut 0, 1, 2, 3, &c; sin circumscribi, ut 1, 2, 3, 4, &c; si vero ita abscribi ut sectorum arcus a spirali bisecentur, erunt ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c, vel ut 1, 3, 5, 7, &c. (nempe ut differentiæ numerorum quadraticorum:) adeoq; si arcus illi (sive numero infiniti sive finiti, quamvis ibidem de infinitis tantummodo verba facta sint, adeoq; hanc curiositatem illic omittendam duxerim,) supponantur in rectum extendi & invicem continuari, ut fiant totidem segmenta diametri parabolæ (continue posita;) unde evadant diametri interceptæ 1, 4, 9, 16, &c. (nam $1+3=4$, $1+3+5=9$, &c;) quibus conveniant ordinatim-applicatæ (quippe in diametrorum ratione subduplicata) quæ erunt ad invicem, ut 1, 2, 3, 4, &c, hoc est ut ipsæ rectæ MT, MT, &c, in figura spirali vera per similium sectorum terminos transeuntes.



Atq; hoc pacto comparare licet, non modo figuram ex sectoribus numero infinitis (quod nos illic fecimus) sed etiam ex numero finitis conflatam, spirali adjacentem, cum figura ex totidem parallelogrammis adjacente parabolæ. Quod quidem (sine nova figura) satis intelligi poterit. Si illi sectorum arcus ponantur $1\,a$, $3\,a$, $5\,a$, &c; radii vero (ipsis proportionales) $2\,r$, $6\,r$, $10\,r$, &c; erunt sectores $1\,ar$, $9\,ar$, $25\,ar$, &c. (nempe semisses parallelogrammorũ radiis & arcubus respectivis contentorũ.) Sumptis item in parabolæ diametro continuis segmentis $1\,a$, $3\,a$, $5\,a$, &c. adeoq; diametris interceptis $1\,a$, $4\,a$, $(=1\,a+3\,a,)$ $9\,a$ $(=4\,a+5\,a)$ &c, & ordinatim-applicatis quæ illis diametris conveniant (in diametrorum ratione subduplicata) $2\,r$, $4\,r$, $6\,r$, &c, (quæ spacia abscindant non æque alta, sed quorum altitudines sint arithmetice proportionales, ut 1, 3, 5, &c. ut patet;) parallelogramma spaciis illis inscripta erunt $1\,a \times 0\,r$, $3\,a \times 2\,r$,

5 $a \times 4$ r, &c, vel 0 ar, 6 ar, 20 ar, &c; circumſcripta, erunt 1 $a \times 2$ r, 3 $a + 4$ r, 5 $a \times 6$ r, &c, vel 2 ar, 12 ar, 30 ar, &c; his autem intermedia partim inſcripta partim circumſcripta (quæ nempe eam habent latudinem quæ eſt arithmeticè media inter duas ordinatim-applicatas ſpatium terminantes) vel (quod tantundem valebit) inſcripta trapezia, erunt 1 $a \times 1$ r, 3 $a \times 3$ r, 5 $a \times 5$ r, &c, vel 1 ar, 9 ar, 25 ar, &c, expoſitis ſectoribus ſigillatim æqualia: iis nempe quorum arcus ſunt parallelogrammorum altitudinibus (hoc eſt, ſegmentis diametri parabolæ) æquales, radii vero latitudinum parallelogrammorum dupli: vel, ſi ſectorum radii ſint parallelogrammorum illorum latitudinibus æquales, erunt parallelogramma ſectorum dupla.

Sed tempus eſt ut prolixo Scholio finem imponam; quod, cur in hunc locum rejecerim, ſupra dictum eſt.

PROP. CLXXXIII. *Theorema.*

Latus numeri Figurati cujuſlibet, in qualibet ſerie Tabellæ expoſitæ (prop. 132.) quouſq; libet continuandæ; ad ſuum illum numerum Figuratum; rationem habet cognitam.

Nempe eam quam indicat prop. præced.

PROP. CLXXXIV. *Theorema.*

Et *propterea*, Series ſequentes in præmiſſa tabella quouſq; libet continuata, non erit difficile interpolare.

Nempe, invento per prop. 182, cujuſq; proprio charactere, fiat interpolatio ut in prop. 175, 176, 181.

Tabella vero, ut dictum est, interpolata sic se exhibebit.

Numeri

		Monadici		Laterales.		Triangulares		Pyramidales.		Trian: pyram.	
	∞	1		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{15}{48}$		$\frac{105}{384}$	
Monadici	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	□	$1\frac{1}{2}$		$1\frac{7}{8}$		$2\frac{9}{48}$		$2\frac{177}{384}$	
Laterales.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	l
		1		$2\frac{1}{2}$		$4\frac{3}{8}$		$6\frac{27}{48}$		$9\frac{9}{384}$	
Triangulares	$\frac{3}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$4\frac{3}{8}$	6	$7\frac{7}{8}$	10	$12\frac{3}{8}$	15	$\frac{l^2+l}{2}$
		1		$3\frac{1}{2}$		$7\frac{7}{8}$		$14\frac{21}{48}$		$23\frac{177}{384}$	
Pyramidales	$\frac{15}{48}$	1	$2\frac{9}{48}$	4	$6\frac{27}{48}$	10	$14\frac{21}{48}$	20	$26\frac{39}{48}$	35	$\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$
		1		$4\frac{1}{2}$		$12\frac{3}{8}$		$26\frac{39}{48}$		$50\frac{105}{384}$	
Triangulipyram.	$\frac{105}{384}$	1	$2\frac{177}{384}$	5	$9\frac{9}{384}$	15	$23\frac{177}{384}$	35	$50\frac{105}{384}$	~~126~~ 70	$\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$

Vel aliter expeditus. Poſtquam per prop 170, 175, &c. interpolatio ſerierum tam tranſverſarum quam erectarum aliquouſq; incepta eſt, licet eam ulterius continuare quouſq; libet ſola additione numerorum jam inventorum; nam non modo numeri tabellæ prop. 132. (prout ibidem monuimus) ſed & qui interpolatione immiſcentur, fiunt ex duobus aliis additis, altero ſuperius altero ad ſiniſtram, (non quidem proximis, ut in prop. 132. ſed, propter loca jam interpolata,) poſt unum locum interjectum poſitis. Ut animadvertenti patebit.

Quod autem de interpolatione unius in ſingulis ſpaciis loci, in propoſitionibus aliquot præcedentibus jam dictum eſt, etiam ad duorum vel trium pluriumve interpoſitionem, mutatis mutandis, facile accommodari poterunt.

SCHOLIUM.

Notandum hic, totum hoc interpolationis negotium, huc uſq; præſtitum, perfici poſſe (etiam ſine inventis cujuſq; ſeriei propriis characteribus) ope monitorum quæ habentur in Scholiis prop. 126. & 154. Interpolatis nempe primo ſeriebus erectis, & iſtis deinde interpolationibus in ſeries item tranſverſas relatis. Verum cum ſingularum ſerierum characteres inveſtigare, res eſſet non injucunda, & lectori forſan non ingrata: placuit ea potius quam habetis methodo incedere.

Cum autem huc perventum eſt, patet, intercalatione facta in ſingulis ſeriebus tam erectis quam tranſverſis Tabellæ prop. 132. novas jam emerſiſſe ſeries ipſis interpoſitas: nondum tamen completas, ſed hiantes. Et quidem locus ille (nota □ inſignitus) quem quam maxime ſuppletum vellem, manet adhuc vacuus. Si autem vel unus ex vacuis illis locis ſuppleri datum ſit, & reliqui non difficulter ſuppleri poterunt; ut ex prop. 188. deinceps patebit.

Cum vero Tabella prop. 132. jam habetur novis ſeriebus interpolata, ut interjectæ ſeries ſuos habeant titulos juxta tenorem illius tabellæ accommodatos, obſervanda eſt hæc ſequens Propoſitio.

PROP. CLXXXV. *Theorema.*

SI seriebus Tabellæ prop. 132. novæ interserantur series, ut suum quæq; debitum sortiatur titulum; observandi sunt indices potestatum illic appositarum; eæq; potestates sunt interponendæ quarum indices cum illarum indicibus debitam analogiam retinent.

Puta, cum potestates, in summitate Tabellæ istius, repertæ indices habeant, 0, 1, 2, 3, 4 &c. interpolatione unius loci ubivis jam facta, potestatum apponendarum indices erunt $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4. &c.

Item cum potestatum illic ad marginem appositarum indices sint $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. seu $\frac{2}{0}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{8}$, &c. potestatum jam appositarum indices erunt $-\frac{2}{1}$, $\frac{2}{0}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{8}$, &c (vel pro $-\frac{2}{1}$, substituas, $-\frac{4}{2}$, vel $-\frac{8}{4}$, vel -2, tantundem enim valent.)

Adeoq; Tabella illa jam interpolata sic se habebit.

Si infinita series Æqualium mulctetur analoga serie Primanorum, vel Secundanorum, aut Tertianorum, &c. Residua, eorumq; Quadrata, Cubi, &c. eam rationem habebunt ad Æqualium seriem congruam, quam habet unitas ad numeros Tabellæ sequentis. Nempe

Seriei

Seriei æqualium mulctatæ serie	Recip. √q Resid.	Æqualia.	√q Residuorum	Residua	√q. Cuborum.	Quadrata.	√q. Quintan.	Cubi.	√q. Septiman.	Biquadrata.
Recipr: Quadrat.	∞	1		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{15}{48}$		$\frac{105}{384}$
Nullâ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Quadratorum.		1	□	$1\frac{1}{2}$		$1\frac{7}{8}$		$2\frac{9}{48}$		$2\frac{177}{384}$
Primanorum.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
Quadr. Subtert.		1		$2\frac{1}{2}$		$4\frac{3}{8}$		$6\frac{27}{48}$		$9\frac{9}{384}$
Subsecundanor.	$\frac{3}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$4\frac{3}{8}$	6	$7\frac{7}{8}$	10	$12\frac{3}{8}$	15
Qu: Subquintan.		1		$3\frac{1}{2}$		$7\frac{7}{8}$		$14\frac{21}{48}$		$23\frac{177}{384}$
Subtertianorum.	$\frac{15}{48}$	1	$2\frac{9}{48}$	4	$6\frac{27}{48}$	10	$14\frac{21}{48}$	20	$26\frac{39}{48}$	35
Q: Subseptiman.		1		$4\frac{1}{2}$		$12\frac{3}{8}$		$26\frac{39}{48}$		$50\frac{105}{384}$
Subquartanor.	$\frac{105}{384}$	1	$2\frac{177}{384}$	5	$9\frac{9}{384}$	15	$23\frac{177}{384}$	35	$50\frac{105}{384}$	70

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

SCHOLIA.

Atq; hic jam notare licet alteram etiam seriem earum quarum in Scholiis prop. 165 & 168. nempe eam quam prop. 118 & 121 prius tradideram, etiam in hâc ipsa Tabella inexspectò prodire: in serie nempe transversa tertia.

PROP. CLXXXVI. *Theorema.*

H*Inc patet*, *quod* Series infinita radicum universali um, ad seriem totidem Æqualium, rationem habere potest satis explicabilem.

Nempe per Tabellam prop. præced. erit.

$\sqrt{q}$ Resid.	Residua	$\sqrt{q}$ Cuborum.
$\sqrt{u}: \sqrt{R} - \sqrt{a}:$	$\sqrt{R} - \sqrt{a}$	$\sqrt{u}: \sqrt{R^3} - 3\sqrt{R^2 a} + 3\sqrt{R a^2} - \sqrt{a^3}:$
$\sqrt{u}: \sqrt{R} - \sqrt{b}:$	$\sqrt{R} - \sqrt{b}$	$\sqrt{u}: \sqrt{R^3} - 3\sqrt{R^2 b} + 3\sqrt{R b^2} - \sqrt{b^3}:$
$\sqrt{u}: \sqrt{R} - \sqrt{c}:$	$\sqrt{R} - \sqrt{c}$	$\sqrt{u}: \sqrt{R^3} - 3\sqrt{R^2 c} + 3\sqrt{R c^2} - \sqrt{e^3}:$
&c. ad	&c ad	&c usq; ad
$\sqrt{}: \sqrt{R} - \sqrt{R}:$	$\sqrt{R} - \sqrt{R}$	$\sqrt{u}: \sqrt{R^3} - 3\sqrt{R^3} + 3\sqrt{R^3} - \sqrt{R^3}:$
$\frac{8}{15} A \sqrt{qqR}$	$\frac{1}{3} A \sqrt{R}$	$\frac{8}{35} A \sqrt{qqR^3}$

$\sqrt{q}$ Residuorum.	Residua	$\sqrt{q}$. Cuborum.
$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{a}$	$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R^2 a} + 3\sqrt[3]{R a^2} - \sqrt[3]{a^3}:$
$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{b}:$	$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R^2 b} + 3\sqrt[3]{R b^2} - \sqrt[3]{b^3}:$
$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{c}:$	$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{c}$	$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R^2 c} + 3\sqrt[3]{R c^2} - \sqrt[3]{c^3}:$
&c ad	&c ad	&c usq; ad
$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{R}:$	$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{R}$	$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R^2 R} + 3\sqrt[3]{R R^2} + \sqrt[3]{R^3}:$
$\frac{48}{105} A \sqrt[6]{R}$	$\frac{1}{4} A \sqrt[3]{R}$	$\frac{48}{315} A \sqrt[6]{R^3} = \frac{48}{315} A \sqrt{R}$
vel $\frac{16}{35} A \sqrt[6]{R}$		$\frac{16}{105} A \sqrt[6]{R^3} = \frac{16}{105} A \sqrt{R}$

Et pari modo in quibusvis aliis istius Tabellæ seriebus in quibus interpolatio perfecta est.

Adeoq; nihil deest ad idem in reliquis seriebus perficiendum (& speciatim ad quadrandum circulum) nisi ut methodus supplendi loca vacua reperiatur, vel (quod eodem recidit) ut seriërum istarum proprius character inveniatur. Et quidem quamvis non obvium sit interpositarum serierum characteres invenire, tamen, quam habent illi ad invicem rationem, ex prop. seq. innotescet: ut siqua possimus arte eorum unum invenire, statim invenientur & reliqui.

PROP.

PROP. CLXXXVII. *Theorema.*

IN Tabella prop. 184. Ut, posito seriei secundæ, hoc est, parium primæ, charactere 1, reliquarum ex paribus characteres fiunt continuâ multiplicatione numerorum $1 \times \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \frac{l+2}{3} \times \frac{l+3}{4}$ &c. (ut dictum est prop. 178.) vel (quod tantundem valet) $1 \times \frac{2l}{2} \times \frac{2l+2}{4} \times \frac{2l+4}{6} \times \frac{2l+6}{8}$ &c. sic, posito seriei primæ (imparium) charactere A, reliquarum ex imparibus characteres fiunt continuâ multiplicatione numerorum $A \times \frac{2l-1}{1} \times \frac{2l+1}{3} \times \frac{2l+3}{5} \times \frac{2l+5}{7}$ &c. Adeoq; ex horum uno cognito innotescent statim & reliqui.

Nam id postulat analogia progressionis Arithmeticæ, quæ & in Numeratoribus & in Denominatoribus conspicitur. Atq; id ipsum comprobat inductio locorum omnium qui complentur; ut non sit dubium quin & idem de vacuis credendum sit.

Adeoq; ex imparium characteribus, uno cognito innotescent etiam & reliqui.

PROP. CLXXXVIII. *Theorema.*

IN singulis seriebus Tabellæ prop. 184. Si primus terminus dicatur A, secundus (hoc est, primus parium,) 1. Reliqui omnes ejusdem seriei (tam pares quam impares) fiunt continua multiplicatione numerorum sequentium. Nempe

Impares

	Impares.	Pares.
In prima	$A \times \frac{0 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c}}$
In ſecund.	$A \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c}}$
In tertia	$A \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \; 10 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \text{ \&c}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c}}$
In quarta	$A \times \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \text{ \&c}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c}}$
In quinta	$A \times \frac{4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \text{ \&c}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}$
In ſexta	$A \times \frac{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}$
In ſeptim.	$A \times \frac{6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \text{ \&c}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c}}$	$1 \times \frac{7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}$
In octava	$A \times \frac{7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \text{ \&c}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 16 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}$

Et ſic deinceps.

Probabitur hæc ex præcedente. Vel etiam (ut præcedens) ex analogia progreſſionis Arithmeticæ Et quidem inductione comprobatur in locis omnibus repletis; ut non ſit dubium quin idem de vacuis etiam credendum ſit.

Si quis autem hæſitat de imparibus ſeriei primæ, (quos aio fieri ex continua multiplicatione numerorum $A \times \frac{0 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ \&c}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c}}$.) nempe, ne 0 ciphra quæ iſtic conſpicitur, totam continuam multiplicationem, quantacunq; fuerit, penitus deſtruat, faciatq; omnes iſtius ſeriei terminos evaneſcere in 0 ciphram ſeu Nihil: Sciendum eſt, inde huic malo procautum eſſe quod terminus A in iſta ſerie ſit ∞ Infinitum (prout ſuperius oſtendimus in Scholiis ad prop. 166.) adeoq; niſi ſequeretur 0 (ad ipſius ∞ vires minuendas) excreviſſent omnes iſtius ſeriei termini in ∞ Infinitum. Sed eorum alterum alteri malo medetur commode. Quamvis enim $\infty \times 0$ non aliquem

quem determinate numerum designet (et propterea nihil inde certi de reliquis quantitatibus concludi possit,) potest tamen quasi virtualiter cujusvis numeri vices subire. Nam quicunq; numerus per ∞ dividatur, quotientem dabit 0, et contra. Puta $\infty)1(0.0)\ 1(\infty.\infty)2(0.0)2(\infty.\infty)3(0.0)3(\infty.$ Et sic de quovis alio: Et propterea (cum *Divisor* in *Quotientem* ductus restituere debeat numerum *Dividendum*) esset $\infty \times 0 = 1$, vel $\infty \times 0 = 2$, vel $\infty \times 0 = 3$; Et sic de quovis alio numero.

PROP. CLXXXIX. *Theorema.*

H*Inc sequitur, quod* Si ex Tabellæ prop. 184. locis vacuis unus quilibet numero noto suppleatur, erunt & reliqui omnes cogniti.

Verbi gratiâ; si numerus hâc notâ □ designatus supponatur cognitus, reliqui omnes etiam cognoscentur; qui nempe eam habent ad illum rationem quæ hic subtus indigitatur.

∞	1	$\frac{1}{2}$ □	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ □	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{15}$ □	$\frac{15}{48}$	$\frac{8}{35}$ □	$\frac{105}{384}$	A
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$ □	1	□	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$ □	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}$ □	$\frac{105}{48}$	$\frac{64}{35}$ □	$\frac{945}{384}$	$A \times \frac{2l-1}{1}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$l = \frac{2l+0}{2}$
$\frac{1}{3}$ □	1	$\frac{4}{3}$ □	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$ □	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15}$ □	$\frac{315}{48}$	$\frac{128}{35}$ □	$\frac{3465}{384}$	$A \times \frac{4l^2-1}{3}$
$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10	$\frac{99}{8}$	15	$\frac{l^2+l}{2} = \frac{4l^2+4l}{8}$
$\frac{4}{15}$ □	1	$\frac{8}{5}$ □	$\frac{7}{2}$	$\frac{64}{15}$ □	$\frac{63}{8}$	$\frac{128}{15}$ □	$\frac{693}{48}$	$\frac{512}{35}$ □	$\frac{9009}{384}$	$A \times \frac{8l^3+12l^2-2l-3}{15}$
$\frac{15}{48}$	1	$\frac{105}{48}$	4	$\frac{315}{48}$	10	$\frac{693}{48}$	20	$\frac{1287}{48}$	35	$\frac{l^3+3l^2+2l}{6} = \frac{8l^3+24l^2+16l}{48}$
$\frac{8}{35}$ □	1	$\frac{64}{35}$ □	$\frac{9}{2}$	$\frac{128}{21}$ □	$\frac{99}{8}$	$\frac{512}{35}$ □	$\frac{1287}{48}$	$\frac{1024}{35}$ □	$\frac{19305}{384}$	$A \times \frac{16l^4+64l^3+56l^2-16l-15}{105}$
$\frac{105}{384}$	1	$\frac{945}{384}$	5	$\frac{3465}{384}$	15	$\frac{9009}{384}$	35	$\frac{19305}{384}$	70	$\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24} = \frac{16l^4+96l^3+176l^2+96l}{384}$

Totus processus demonstratur ex prop. præced.

Notandum autem & hic numerum quemvis intermedium aggregatum esse ex duobus altero sursum altero ad dextram (non proximis, sed post unum intermissum,) positis.

Cujusq; seriei characterem (quatenus per prop. 181 innotescit,) libuit etiam adjungere, quo melius perspiciat lector quousq; rem perduximus.

SCHOLIUM.

Atq; hactenus quidem rem perduxisse videamur satis feliciter. Verum hic tandem hæret aqua. Neq; enim video quo pacto possim vel quantitatem □ reperire, vel characterem seriei A. (E: propterea, nec characteres serierum imparium penitus assequi, licet eorum ad invicem rationes cognoscantur; nec imparium serierum locos impares, quamvis & horum etiam cognoscantur quas habent ad invicem rationes.) Quanquam enim si numeri laterales sint integri, puta 1, 2, 3, 4, &c. nota erit quantitas A, puta $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{15}{48}$, &c. non tamen facile est deprehendere quo pacto horum numerorum ad suos respective numeros laterales ratio possit unâ aliqua æquatione explicari: unde & reliquis lateribus (locorum imparium) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, &c accommodari possit sua quantitas A. Quanquam enim hinc spes non exigua visa est affulsisse, lubricus tamen quem præ manibus habemus Proteus tam hic quam superius non raro elapsus, spem fefellit. Quem autem & hic comprimenti vultum ostenderit, non erit fortassis ingratum apposuisse. Nempe ----

PROP. CLXXXX. *Theorema.*

IN serie quarta, (sive parium secunda,) cujus numeri alternè sumpti (in locis paribus) 1, 2, 3, 4, 5, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum seu rationum $1 \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4}$, &c. seu $1 \times \frac{4}{2} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{6} \times \frac{10}{8}$ &c; & , (in locis imparibus,) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, &c. ex multiplicatis $\frac{1}{2} \times \frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \frac{9}{7}$, &c: Si, propter intercalationem unius in singulis spaciis numeri, (ut ex locis tam paribus quam imparibus intermistis una fiat series,) quælibet rationum, in quas continue multiplicatur terminus tam parium

parium quam imparium primus, in binas dirimenda eſt, (nam, verbi gratia, ratio 1 ad 2 compoſita eſt ex ratione 1 ad $1\frac{1}{2}$ ad $1\frac{1}{2}$ ad 2,) hoc modo

$$\overbrace{\tfrac{1}{2} \times \tfrac{2}{1}}^{1} \times \overbrace{\tfrac{3}{2} \times \tfrac{4}{3}}^{\frac{4}{2}} \times \overbrace{\tfrac{5}{4} \times \tfrac{6}{5}}^{\frac{6}{4}} \times \overbrace{\tfrac{7}{6} \times \tfrac{8}{7}}^{\frac{8}{6}} \times \tfrac{9}{8} \quad \&c.$$

$$\frac{1}{2} \times \underbrace{\tfrac{2}{1} \times \tfrac{3}{2}}_{\frac{3}{1}} \times \underbrace{\tfrac{4}{3} \times \tfrac{5}{4}}_{\frac{5}{3}} \times \underbrace{\tfrac{6}{5} \times \tfrac{7}{6}}_{\frac{7}{5}} \times \underbrace{\tfrac{8}{7} \times \tfrac{9}{8}}_{\frac{9}{7}}$$

In ſerie ſexta, (ſive, parium tertia,) ſi idem faciendum ſit; diſtribuenda eſt quælibet ratio item in binas, ſed quarum utraq; eſt ex duabus compoſita; ad hunc modum.

$$1 \times \frac{6}{2} \times \frac{8}{4} \times \frac{10}{6} \quad \&c.$$

$$\frac{1\times3}{2\times4} \times \frac{2\times4}{1\times3} \times \frac{3\times5}{2\times4} \times \frac{4\times6}{3\times5} \times \frac{5\times7}{4\times6} \times \frac{6\times8}{5\times7} \times \frac{7\times9}{6\times8} \times \frac{8\times10}{7\times9} \quad \&c.$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{3} \times \frac{9}{5} \quad \&c.$$

Nempe, diviſa prius quâlibet ratione in quaternas, (puta $\frac{6}{2} = \frac{3\times4\times5\times6}{2\times3\times4\times5}$, et $\frac{7}{3} = \frac{4\times5\times6\times7}{3\times4\times5\times6}$, Et ſic in cæteris) & tum diſtributione alternatim facta in binas claſſes.

In ſerie Octava (ſive parium quarta) diſtribuenda eſt quælibet ratio item in binas, ſed quarum utraq; eſt ex ternis compoſita, ſic.

$$1 \times \frac{8}{2} \times \frac{10}{4} \quad \&c.$$

$$\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6} \times \frac{2\times4\times6}{1\times3\times5} \times \frac{3\times5\times7}{2\times4\times6} \times \frac{4\times6\times8}{3\times5\times7} \times \frac{5\times7\times9}{4\times6\times8} \times \frac{6\times8\times10}{5\times7\times9} \quad \&c.$$

$$\frac{15}{48} \times \frac{7}{1} \times \frac{9}{3} \quad \&c.$$

Nempe, diviſa prius qualibet ratione in ſenas, (puta

$\frac{1}{2} = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$, & $\frac{2}{1} = \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}$, &c.) quæ poſtea diſtribuenda ſunt alternatim in duas claſſes.

Et ſimiliter in ſerie Decima, Duodecima, &c. dividenda quælibet ratio in Octonas, Denas, &c. quæ alternatim diſtribuendæ ſunt in duas claſſes.

(In ſerie autem Secunda (ſive parium Prima) nulla rationum diviſione opus eſt, ſed cum omnes ſint eadem æqualitatis ratio, ſive $\frac{1}{1}$; eadem illa eſt & ubiq; interponenda, nam $\frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$.)

Verum ſi in ſeriebus Imparibus illud aggrediamur; nempe ut quælibet ratio in duas (æquabiliter progrediendo) diſtribuatur; res non ita feliciter ſuccedit.

Nam (verbi gratia) cum (ex analogia reliquarum) rationes ſeriei Quintæ dividendæ eſſent in ternas, Septimæ in quinas, &c. (numero ſemper impares,) non poteſt fieri iſta æquabilis earum diſtributio in duas claſſes quæ ad debitam interpolationem requiritur.

Tota propoſitio (inſpecta Tabella) ſatis per ſe patet animadvertenti.

Res aliquanto clarius fortaſſe patebit ubi ſerierum aliquot rationes in binas, ternas, quaternas, &c. (prout ſeries quælibet poſtulat) diviſero. Nempe

In ſerie tertia.

	$\frac{2}{1} = \frac{2}{1}$
$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$	
	$\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$
$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$	
	$\frac{6}{5} = \frac{6}{5}$
$\frac{7}{6} = \frac{7}{6}$	
	$\frac{8}{7} = \frac{8}{7}$
$\frac{9}{8} = \frac{9}{8}$	

In ſerie quarta.

	$\frac{3}{1} = \frac{2 \times 3}{1 \times 2}$
$\frac{4}{2} = \frac{3 \times 4}{2 \times 3}$	
	$\frac{5}{3} = \frac{4 \times 5}{3 \times 4}$
$\frac{6}{4} = \frac{5 \times 6}{4 \times 5}$	
	$\frac{7}{5} = \frac{6 \times 7}{5 \times 6}$
$\frac{8}{6} = \frac{7 \times 8}{6 \times 7}$	
	$\frac{9}{7} = \frac{8 \times 9}{7 \times 8}$
$\frac{10}{8} = \frac{9 \times 10}{8 \times 9}$	

In

In serie quinta.

$$\frac{4}{1}=\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3} \qquad \frac{3}{2}=\frac{3\times4\times5}{2\times3\times4}$$

$$\frac{6}{3}=\frac{4\times5\times6}{3\times4\times5} \qquad \frac{7}{4}=\frac{5\times6\times7}{4\times5\times6}$$

$$\frac{8}{5}=\frac{6\times7\times8}{5\times6\times7} \qquad \frac{9}{6}=\frac{7\times8\times9}{6\times7\times8}$$

$$\frac{10}{7}=\frac{8\times9\times10}{7\times8\times9} \qquad \frac{11}{8}=\frac{9\times10\times11}{8\times9\times10}$$

In serie sexta.

$$\frac{5}{1}=\frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4} \qquad \frac{6}{2}=\frac{3\times4\times5\times6}{2\times3\times4\times5}$$

$$\frac{7}{3}=\frac{4\times5\times6\times7}{3\times4\times5\times6} \qquad \frac{8}{4}=\frac{5\times6\times7\times8}{4\times5\times6\times7}$$

$$\frac{9}{5}=\frac{6\times7\times8\times9}{5\times6\times7\times8} \qquad \frac{10}{6}=\frac{7\times8\times9\times10}{6\times7\times8\times9}$$

$$\frac{11}{7}=\frac{8\times9\times10\times11}{7\times8\times9\times10} \qquad \frac{12}{8}=\frac{9\times10\times11\times12}{8\times9\times10\times11}$$

In serie septima.

$$\frac{6}{1}=\frac{2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4\times5} \qquad \frac{7}{2}=\frac{3\times4\times5\times6\times7}{2\times3\times4\times5\times6}$$

$$\frac{8}{3}=\frac{4\times5\times6\times7\times8}{3\times4\times5\times6\times7} \qquad \frac{9}{4}=\frac{5\times6\times7\times8\times9}{4\times5\times6\times7\times8}$$

$$\frac{10}{5}=\frac{6\times7\times8\times9\times10}{5\times6\times7\times8\times9} \qquad \frac{11}{6}=\frac{7\times8\times9\times10\times11}{6\times7\times8\times9\times10}$$

$$\frac{12}{7}=\frac{8\times9\times10\times11\times12}{7\times8\times9\times10\times11} \qquad \frac{13}{8}=\frac{9\times10\times11\times12\times13}{8\times9\times10\times11\times12}$$

In seriebus hisce (quantumlibet continuatis) et sequentibus omnibus, notandum est, Rationes cujuslibet ex paribus seriei dividi in alias numero pares, quæ propterea commode distribui possunt (ut dictum est) in duas Classes: cujuslibet autem ex seriebus imparibus, rationes dividi in alias numero impares, quæ propterea sic distribui non possunt.

SCHOLIUM.

Si quis autem putet huic malo medelam satis commode applicari posse, dividendo rationes seriei quintæ, septimæ, &c. (non in ternas, quinas, &c. sed) in senas, denas, &c. (nempe bis ternas, bis quinas, &c.) ut ita rationes (jam numero pares) distribui possint in binas classes: Res neutiquam ex voto succedet Nam hoc quidem tantundem est acsi Rationes seriei quartæ, sextæ, octavæ, &c, dividantur (non in binas, quaternas, senas, &c, sed) in quaternas, octonas, duodenas, &c. Et harum postea fiat alternatim distributio in duas classes. Quod quidem

ſi fieret, non ipſæ prodirent rationes quæſitæ, (quas ſupra exhibuimus,) ſed aliæ ab ipſis ſatis diverſæ, ut experienti patebit.

Et quidem proclivis ſum ut credam (quod et ab initio ſuſpicatus ſum,) rationem illam quam quærimus talem eſſe quæ non poterit numeris exprimi juxta ullum adhuc receptum notationis modum, ne quidem per latera ſurda; (quale quid innuit Schotenius, de radicibus Æquationum quarundam cubicarum, in ipſius *Appendice* ad tractatum *de Organica Conicarum Sectionum deſcriptione*, idq; ad mentem Vietæi, Carteſii, & aliorum:) ut neceſſe videatur alium ejuſmodi rationem explicandi modum introducere, quam vel per numeros veros, vel etiam per latera ſurda.

Atq; hæc quidem noſtra ſive ſententia, ſive conjectura hinc confirmari videtur; Quoniam, ſi,ut ſerierum parium quælibet (in Tabella prop. 184) ſuum habet appoſitum characterem, ita & imparium quælibet ejuſmodi characterem nacta eſſet: tum, ut per characteres parium, rationem inveſtigari docuimus quam habet ſeries finita Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo Æqualium, (in Scholiis ad prop. 182) ita per ejuſmodi characteres ſerierum imparium, ſimiliter inveſtiganda videretur ratio quam habet finita ſeries Subſecundanorum , Subtertianorum, &c. ad ſeriem totidem horum maximo Æqualium: cur autem hoc non ſperandum ſit, oſtendimus in Scholiis ad prop. 165.

Et propterea quod in aliis Arithmetices negotiis fieri ſolet; illud & hic faciendum erit: nempe, ubi ad ἀδύνατον aliquid pervenitur, quod quidem fieri ſupponendum eſt, nec tamen actu fieri poteſt; excogitant modum aliquem exprimendi id quod fieri ſupponitur utut factum non ſit.

Atq; hoc quidem in Arithmeticis operationibus omnibus reſolutoriis uſu venit. v. g. In ſubductione ; ſi proponitur numerus major ex minori auferendus, puta 3 ex 2, vel 2 ex 1; quoniam id actu præſtari non poteſt , excogitantur numeri negativi quibus exprimatur ejuſmodi ſuppoſititia ſubductio, puta, $2 - 3$, vel $1 - 2$, vel $- 1$.

In diviſione; ſi proponatur numerus per alium dividendus qui ipſum non metitur, puta 3 per 2 ; cum hoc actu præſtari

non

non possit, inventus est modus ejusmodi suppositititiam divisionem indicandi ad hanc formam $\frac{3}{2}$ vel $1\frac{1}{2}$.

In extractione Radicum; si proponatur numerus resolvendus qui non sit sui generis vere figuratus; verbi gratia, si quæratur radix quadratica numeri 12, quoniam radix illa non potest ullis numeris sive integris sive fractis exponi, ideo inventa est methodus ejusmodi Radicem supposititiam utcunq; indicandi ad hanc formam, $\sqrt{12}$, vel $2\sqrt{3}$.

Pariter, in Progressione Geometrica, puta 3, 6, 12, &c. Si quæratur terminus novus inter 3 & 6 interponendus, dicetur ille $3\sqrt{2}$ vel $\sqrt{18}$ vel $\sqrt{:3\times6:}$ vel forte (quod tantundem valet) $\sqrt{:2\times9:}$ quod idem est atq; explicatius dicere, *terminus medius inter 3 & 6 in progressione* 3, 6, 12, &c. aut *inter 2 & 9 in progressione* 2, 9, $40\frac{1}{2}$ &c. Ita si inter 3, 6, interponendi essent duo medii Geometrici, esset eorum prior $\sqrt{c:3\times3\times6:}$ vel $\sqrt{c\,54}$ vel potius $3\sqrt{c\,2}$, (nempe 3 ducti in radicem cubicam communis rationis 2) et sic in cæteris.

Si autem Progressio Geometrica, quæ supponitur fieri ex continua multiplicatione primi termini in numeros quotlibet invicem æquales, (puta 3, 6, 12, 24, &c. ex continua multiplicatione $3\times2\times2\times2$ &c.) non semper admittat terminos intermedios rationales: non mirandum est si neq; illud contingat in progressione facta ex termini primi continua multiplicatione in quotlibet succedentes numeros inæquales, sive crescentes sive decrescentes; (puta 1, 2, 6, 24, &c. ex continue multiplicatis $1\times2\times3\times4$ &c; vel 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{105}{48}$, &c. ex continuè multiplicatis $1\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}$. &c.

Quoties autem hoc contingit, cum illud veris numeris designari non possit (& ne quidem solis radicibus surdis) quærendus erit modus aliquis id ipsum utcunq; exprimendi. Si igitur ut $\sqrt{:3\times6:}$ significat *terminum medium inter 3 & 6 in progressione Geometrica æquabili* 3, 6, 12, &c. (continue multiplicando $3\times2\times2$ &c.) ita ☐: $1\,|\,\frac{3}{2}$: significet *terminum medium inter 1 & $\frac{3}{2}$ in progressione Geometrica decrescente* 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, &c. (continue multiplicando $1\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}$ &c.) erit □ = ☐: $1\,|\,\frac{3}{2}$: Et propterea *circulus est ad quadratum diametri, ut 1 ad* ☐: $1\,|\,\frac{3}{2}$. Quæ quidem erit vera circuli quadratura in numeris, quatenus ipsa numerorum natura patitur, explicata.

Et quidem, sicut in progressione Geometrica æquabili, 3, 12, 48,

48, &c. quanquam qui terminum inter 3 & 12 intermedium dicit $\sqrt{:}\ 3 \times 12:$ non dicendus erit rem ſatis explicaſſe, quoniam terminus ille explicatius dici poſſit 6 (eſt enim $\sqrt{:}\ 3 \times 12: = \sqrt{36} = 6 :$) attamen qui inter 3 & 6 (in progreſſione 3, 6, 12, &c.) terminum aſſignat intermedium $\sqrt{:}\ 3 \times 6:$ (vel ſaltem $\sqrt{18}$, aut $3\sqrt{2}$,) rem ſatis explicaſſe dicendus erit, quoniam non poteſt in vero numero aſſignari: Ita qui in progreſſione 1, $\frac{15}{8}$, $\frac{945}{384}$, &c, terminum inter 1 et $\frac{15}{8}$ intermedium dicit mr~ : 1 | [illegible] : non ſatis explicate rem tradit, dicere enim potuiſſet $\frac{3}{2}$; At qui inter 1 et $\frac{3}{2}$ medium terminum aſſignat mr~ : 1 | $\frac{1}{2}$: ſatis rem explicaſſe dicendus eſt, cum iſte terminus non poſſit veris numeris exprimi: adeoq; ſufficit ſi utcunq; indicetur.

Atq; inſuper, ut $\sqrt{:}\ 3 \times 6:$ (in progreſſione 3, 6, 12, &c.) vel $\sqrt{18}$, vel $3\sqrt{2}$, quamvis veris numeris explicari non poteſt accurate, poteſt tamen quam proxime deſignari; (puta major quam 4|24, minor tamen quam 4|25; item major quam 4|2426, minor quam 4|2427; item major quam 4|242639, minor quam 4|242640; et ſic deinceps) ita et numerus □ = mr~ : 1 | $\frac{1}{2}$: deſignari poteſt veris numeris quam proxime, licet non accurate; puta major quam 1|27, minor tamen quam 1|28; item major quam 1|2732, et minor quam 1|2733; item major quam 1|273239, et minor quam 1|273240; et ſic deinceps, prout vel ex tabella noſtra (quod ſequente propoſitione oſtenſurus ſum) vel etiam aliunde variis modis colligi poteſt.

Adeo ut nihil videam cur non ratio circuli ad Quadratum circumſcriptum (vel etiam Ellipſeos ad circumſcriptum parallelogrammum) nempe ut 1 ad □ = mr~ : 1 | $\frac{1}{2}$: vel □ = 1 mr~ $\frac{1}{2}$. (hoc eſt, ut 1 ad terminum medium inter 1 et $\frac{3}{2}$ in progreſſione 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$ &c,) æque τεχνικῶς explicari dicenda ſit, atq; ratio lateris ad diagonium in quadrato, nempe ut 1 ad $1\sqrt{2}$ vel ad $\sqrt{:}\ 1 \times 2:$ (hoc eſt, ut 1 ad terminum medium inter 1 et 2 in progreſſione 1, 2, 4, &c.) niſi quod hæc notatio $\sqrt{2}$ vel $\sqrt{:}\ 1 \times 2:$ jamdiu fuerit recepta (ſed quæ aliquando fuit nova;) noſtra vero jam primitus introducta, propter novum progreſſionis genus jam primum (quod ſciam) detectum, Sicut autem notatio numeri ſurdi (puta $\sqrt{2}$ &c.) in Arithmeticam introduxit methodum addendi, ſubducendi, multiplicandi, dividendi, &c. latera ſurda; ita non erit difficile ejuſmodi

modi operationes ad novum hunc noſtrum notationis modum applicare; quod tamen præſentis inſtituti non eſt. Non ignoro interim ad hanc ipſam notationem accuratius perficiendam, apponendas eſſe notæ $\square$ diſtinctiones ſuas, puta $\square^2$, $\square^3$, $\square^4$, &c, prout indicaverit vel medium unicum, vel primum duorum, trium, &c; ſicut & notæ $\surd$ fieri ſolet, puta $\surd^2$, $\surd^3$, $\surd^4$, &c, prout deſignat radicem quadraticam, vel cubicam, biquadraticam, &c, hoc eſt, vel unicum, vel primum duorum, trium, &c. mediorum proportionalium: Item alias apponendas eſſe diſtinctiones quæ indicent, an continui multiplicationes (in expoſita ſerie interpolanda) vel unitate, vel numero binario, ternario, &c. continue creſcant. Verum ea omnia, & ſiqua ſunt ſimilia, remittenda ſunt ad accuratiorem hujuſce progreſſionis diſquiſitionem ſi illam in Arithmeticam admittendam ſentiant Mathematici, (quod quo minus fiat nihil video.) Præſenti ſufficit inſtituto illud quod volumus utcunq; indicare, & quod in charactere deficit apertis verbis ſupplere. Si autem notationis modus ille a nobis excogitatus Mathematicis minus placuerit; ego quam lubentiſſime illum mutari patiar modo aptiorem oſtendant.

Ut ut ſit: Ego quidem neceſſe habeo ut fatear, me nec ejuſmodi pro ſeriebus imparibus quales pro paribus in Tabella, characteres; nec ſerierum imparium locos impares, adhuc ſupplere poſſe, juxta aliquem (quem adhuc receptum ſcio) notationis modum; (quanquam eorum ad invicem rationes jam oſtenderim.) Et quanquam in ſuperioribus, per avia non raro, et tramites nulli quod ſciam antea calcatas perrumpens, inſperatos exitus aliquoties invenerim: vix tamen (ob cauſas jam expoſitas) auſim ſperare, & hic item ex voto omnia ſucceſſura. Si forſan alius aliquis noſtra dehinc premens veſtigia eo tandem perveniat quo mihi non datum eſt pervenire, (nollem enim pro noſtri modulo aliorum item omnium ingeniis terminos indicere,) & modos magis accommodos eidem quantitati exprimendæ invenerit, ego neutiquam gravatim feram. Mathematicis interim haud ingratum fore autumo me novam aliquam nec (ſi quid ego judico) prorſus contemnendam, obſcuro ſatis de circuli quadratura problemati, lucem præbuiſſe; eamq; eatenus numeris explicaſſe quatenus ipſa numerorum natura ferat.

Quod autem jam invenimus, libet etiam, in sequentibus aliquot propositionibus, mutata aliquantulum forma proponere. Et primo quidem qui id possit numeris absolutis quam proxime designari, & deinde etiam lineis rectis.

PROP. CLXXXXI. *Problema.*

PRopositum sit inquirere, quantus sit terminus $\square$ (tabellæ prop. 189.) in numeris absolutis quam proxime.

Quo facilius res succedat, progressionis (ibidem repertæ)

termini $\frac{1}{2}\square \,.\, 1 \,.\, \square \,.\, \frac{3}{2} \,.\, \frac{4}{3}\square \,.\, \frac{3\times5}{2\times4} \,.\, \frac{4\times6}{3\times5}\square \,.\, \frac{3\times5\times7}{2\times4\times6}$. &c.

dicantur, $\alpha \,.\, a \,.\, \beta \,.\, b \,.\, \gamma \,.\, c \,.\, \delta \,.\, d$. &c.

Est autem $1 . 2 :: \alpha . \beta$. Et $2 . 3 :: a . b$. Et $3 . 4 :: \beta . \gamma$. Et $4 . 5 :: b . c$. Et $5 . 6 :: \gamma . \delta$. Et $6 . 7 :: c . d$. &c.

Hoc est, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{1}$, $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$, $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{4}{3}$, $\frac{c}{b} = \frac{5}{4}$, $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{6}{5}$, $\frac{d}{c} = \frac{7}{6}$ &c.

Ideoq; (cum rationes continue multiplicantes perpetuo decrescant) erit

$$\frac{\beta}{a}\left\{\begin{array}{l} \text{minor duarum}\ \frac{a}{\alpha}\times\frac{\beta}{a} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{1} \\ \text{major duarum}\ \frac{\beta}{a}\times\frac{b}{\beta} = \frac{b}{a} = \frac{3}{2} \end{array}\right\}\ \text{Ideoq;}\ \left\{\begin{array}{l} \text{minor quam}\ \surd\frac{2}{1} = \surd 1\frac{1}{1}. \\ \text{major quam}\ \surd\frac{3}{2} = \surd 1\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

$$\text{Et propterea}\ \beta = a\times\frac{\beta}{a} = \square \left\{\begin{array}{l} \text{minor quam}\ 1\surd 2 = 1\surd 1\frac{1}{1}. \\ \text{major quam}\ 1\surd\frac{3}{2} = 1\surd 1\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

$$\text{Item}\ \frac{\gamma}{b}\left\{\begin{array}{l} \text{minor duarũ}\ \frac{b}{\beta}\times\frac{\gamma}{b} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{4}{3} \\ \text{major duarũ}\ \frac{\gamma}{b}\times\frac{c}{\gamma} = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}. \end{array}\right\}\ \text{Ideoq;}\ \left\{\begin{array}{l} \text{minor quam}\ \surd\frac{4}{3} = \surd 1\frac{1}{3}. \\ \text{major quam}\ \surd\frac{5}{4} = \surd 1\frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Et

Et propterea $b \times \frac{\gamma}{b} = \gamma = \frac{4}{3}$ □ $\begin{cases} \text{minor quam } \frac{3}{2} \times \sqrt{1\frac{1}{3}}. \\ \text{major quam } \frac{3}{2} \times \sqrt{1\frac{1}{4}}. \end{cases}$

Hoc est, □ $\begin{cases} \text{minor quam } \frac{3 \times 3}{2 \times 4} \times \sqrt{1\frac{1}{3}}. \\ \text{major quam } \frac{3 \times 3}{2 \times 4} \times \sqrt{1\frac{1}{4}}. \end{cases}$

Et (pari ratione) erit $\delta = c \times \frac{\delta}{c} = \frac{4 \times 6}{3 \times 5}$ □ $\begin{cases} \text{minor quã } \frac{3 \times 5}{2 \times 4} \times \sqrt{1\frac{1}{5}}. \\ \text{major quã } \frac{3 \times 5}{2 \times 4} \times \sqrt{1\frac{1}{6}}. \end{cases}$

Hoc est, □ $\begin{cases} \text{minor quam } \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 4 \times 6} \sqrt{1\frac{1}{5}}. \\ \text{major quam } \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 4 \times 6} \sqrt{1\frac{1}{6}}. \end{cases}$

Et (continuatà ejuſmodi operatione juxta Tabellæ leges) invenietur

□ $\begin{cases} \text{minor quam } \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14} \times \sqrt{1\frac{1}{13}}. \\ \text{major quam } \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14} \times \sqrt{1\frac{1}{14}}. \end{cases}$

Et ſic deinceps quouſq; libet. Ita nempe ut fractionis Numerator fiat continue multiplicando numeros impares 3, 5, 7, &c. bis poſitos; Denominator vero, continue multiplicando numeros pares, 2, 4, 6, &c, bis item poſitos, exceptis primo & ultimo, qui ſemel ponuntur: Et tota deniq; ratio ſeu fractio, ſic facta, ducatur in Radicem-quadraticam Unitatis aliquotâ-parte ſui auctæ; eâ nempe quæ denominatorem habet eum qui eſt ultimus numerorum, continue multiplicatorum, imparium, ſi quæramus numerum juſto majorem, vel parium, ſi juſto minorem.

Atq; hoc pacto eouſq; tandem pervenietur donec majoris & minoris differentia evadat quavis aſſignata minor; (quæ propterea, ſi ſupponatur in infinitum continuanda operatio, tandem

dem evanitura est.) Quod quidem, si opus sit, sic demonstrabitur.

Numerorum, ita ut jam dictum est, continuè multiplicatorum, parium maximus (nempe, ex denominatoris factoribus ultimus) dicatur z; adeoq; imparium maximus (nempe, ultimus ex factoribus Numeratoris,) erit $z - 1$, (quippe qui ab isto unitate deficit.) Erit igitur (propter eundem utrobiq; multiplicatorem compositum) numerus justo major ad numerum justo minorem ut $\sqrt{1\frac{1}{z-1}}$ ad $\sqrt{1\frac{1}{z}}$, (nempe, ut terminalis numerus surdus in illo ad terminalem numerum surdum in hoc,) hoc est, ut $\sqrt{\frac{z}{z-1}}$ ad $\sqrt{\frac{z+1}{z}}$, hoc est, ut $\sqrt{\frac{z^2}{z-1}}$ ad $\sqrt{:z+1:}$ hoc est, ut $\sqrt{z^2} = z$ ad $\sqrt{:z^2-1}$. Fieri autem potest (aucta nempe, quantum opus est, quantitate z) ut differentia radicum $\sqrt{z^2}$ & $\sqrt{:z^2-1:}$ nempe $z - \sqrt{:z^2-1:}$ minor evadat quâvis assignanda, (ut notum est, & alibi etiam a nobis dictum ad prop. 39. Con. Sect.) Et propterea numerus justo major excedat numerum justo minorem, secundum eam rationem quæ minor sit quavis assignata. Quod erat ostendendum.

Cum autem, ut ex dictis patet, aucto in infinitum numero z, numerus justo major numerum justo minorem eâ ratione superet quæ minor sit quavis assignata: erit eorum ab invicem differentia (& propterea utriusvis a justo) infinite parva, hoc est, nulla.

Porro; Quoniam, numero z sic in infinitum aucto, illa Unitati adjuncta pars sui aliquota, futura est infinite parva; erit, sive $\sqrt{1\frac{1}{z}}$, sive $\sqrt{1\frac{1}{z-1}}$, tantundem atq; $\sqrt{1}$, sive 1, (propter evanescentem partem infinite parvam,) quæ multiplicando nihil mutat: Dicimus, fractionem illam $\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times\&c.}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times\&c.}$ in infinitum continuatam, esse ipsissimum quæsitum numerum $\square$ præcise; ad quem ita se habet 1, ut circulus ad Quadratum diametri: Vel, (si id magis placeat,) ut est istius fractionis Denominator ad Numeratorem, sic esse dicimus circulum ad

diametri

diametri Quadratum: Et, ut Numerator ille ad Denominatorem, sic Quadratum illud ad Circulum.

Si quis autem curiosius inquirat, quousq; continuanda erit illa multiplicatio continua, ut tandem ad differentiam datam, sive ipsa minorem perveniatur: Nempe ut numerus justo major, numerum justo minorem, ipsius parte quamlibet exigua (vel ne illa quidem) superet: Id hoc modo investigabitur.

Quantitas major dicatur m, minor n, sitq; earum differentia, istius pars quantumvis exigua; puta $\frac{a}{b}m = m - n$; & quæratur quousq; continuanda erit operatio, hoc est, quis futurus est numerus z multiplicatorum maximus, ut illa differentia (vel saltem ipsa minor) prodeat.

Quoniam igitur $m - n = \frac{a}{b}m$, erit $n = m - \frac{a}{b}m$; & $m.$ $n :: m.\ m - \frac{a}{b}m :: \frac{b}{b}m.\ \frac{b-a}{b}m :: b.\ b-a :: z.\ \sqrt{:z^2 - 1}$. (per modo demonstrata.) Ideoq; $b\sqrt{:z^2-1:} = bz - az$. Et (utrinq; quadrando) $b^2z^2 - b^2 = b^2z^2 + a^2z^2 - 2abz^2$. Atq; (delendo utrinq; b^2z^2, & reliqua transponendo,) $2abz^2 - a^2z^2 = b^2$. Et deniq; (utrinq; dividendo) $z^2 = \frac{b^2}{2\cdot b - a\cdot a}$. Hujus igitur numeri radix quadratica, (si fuerit numerus par,) vel saltem, (sive fractus vel surdus sit vel numerus impar) par numerus illa proxime major, futurus est multiplicatorum maximus, ut assignata differentia, vel ipsa saltem minor, proveniat. Quod erat investigandum.

Idem Aliter.

Post hanc autem nostram, ipsius quantitatis □ designationem; libet etiam aliam subjungere, quam a Nobilissimo Viro, atq; acutissimo simul Geometra, Dom. Guliel. Vicecon, & Barone *Brouncker*, accepi.

Cum illi progressionum aliquot mearum proposuerim, & qua lege procederent indicaverim, id interim rogans, ut qua forma quantitatem illam commode designandam putaverit, indi-

caret; Nobilissimus Vir ille, re apud se perpensa, methodo item Infinitorum sibi peculiari quantitatem ad hanc formam commodissime designandam judicavit.

$$\square = 1\frac{1}{2+\frac{9}{2+\frac{25}{2+\frac{49}{2+\frac{81}{2+\&c.}}}}}$$

Nempe si unitati adjungatur fractio, quæ denominatorem habeat continuè fractum; eâ lege, ut particularium fractionum Numeratores sint 1, 9, 25, &c. numeri quadratici imparium 1, 3, 5, &c. Denominator vero ubiq; 2 cum adjuncta fractione, & sic in infinitum. Hoc simul addito, ut, ubicunq; tandem placeat consistere, pro ultimo numero 2 cum fractione deinceps insecuturâ, ponatur horum aliquis (prout locus ubi consistitur postulaverit) 3, 5, 7, 9, &c. (deinceps ab 1, numero integro, arithmetice proportionalium;) nempe si in primo loco sistatur, 3; si in secundo, 5; si in tertio, 7; & sic deinceps; posito numeri qui locum denominat duplo unitate aucto. Atq; hoc pacto, si in fractionis loco impari sistatur, prodibit numerus justo major; sin pari, justo minor. Quo longius autem procedatur eo propius utrinq; ad numerum justum acceditur.

$1.$ justo minor.

$1\frac{1}{3}.$ justo major.

$1\frac{1}{2+\frac{9}{5}}.$ justo minor.

$1\frac{1}{2+\frac{9}{2+\frac{25}{7}}}.$ major.

$1\frac{1}{2+\frac{9}{2+\frac{25}{2+\frac{49}{9}}}}$ minor.

Atq; ad eandem formam numeros reliquos tabellæ nostræ quæsitos designavit; aliasq; ex progressionibus nostris, iis in exposita tabella similes, interpolavit. Totum vero illius methodi processum aperire, longius esset quam ut hic inseratur. Sperabam autem aliquando fore ut id ipsum ab illo in formam digestum publice exhibeatur.

SCHOLIUM.

Quum vero Nobilissimo Viro difficilius persuasum iri video ut illud ipse suscipere velit: conabor ego rem illam ad ipsius mentem, quam possim proxime, breviter exhibere.

Animadvertit siquidem Nobilissimus Vir, numeros duos impares continue proximos, si invicem ducantur, rectangulum facere, quod quadrato intermedii numeri paris sit unitate minus

(puta

(puta $1 \times 3 = 3 = 4 - 1 = Q2 - 1$. $3 \times 5 = 15 = 16 - 1 = Q4 - 1$. &c.) Et similiter duos pares proxime positos rectangulum facere quod unitate minus sit quam quadratum intermedii numeri imparis, (puta $0 \times 2 = 0 = 1 - 1 = Q1 - 1$. $2 \times 4 = 8 = 9 - 1 = Q3 - 1$. $4 \times 6 = 24 = 25 - 1 = Q5 - 1$. &c.) Quærebat igitur qua ratione augendi erant factores, ut prodirent rectangula, non quadratis illis unitate minutis, sed ipsis quadratis æqualia. Invenit autem id fieri posse, si utriq; factores fractione augeantur, quæ denominatorem haberet continue fractum in infinitum, ad eam formam quam superius exhibuimus: Nempe ut particularium fractionum Numeratores sint quadrata numerorum imparium, Denominator verò ubiq; integri duplus fractione auctus in infinitum. Ad hanc formam, quousq; libet continuandam.

$1 = Q1$	$9 = Q3$	$25 = Q5$	$49 = Q7$	$81 = Q9$	
$0\,\frac{1}{0\,\frac{9}{0\,\frac{25}{0+}}}$	$2\,\frac{1}{4\,\frac{9}{4\,\frac{25}{4+}}}$	$4\,\frac{1}{8\,\frac{9}{8\,\frac{25}{8+}}}$	$6\,\frac{1}{12\,\frac{9}{12\,\frac{25}{12+}}}$	$8\,\frac{1}{16\,\frac{9}{16\,\frac{25}{16+}}}$	$10\,\frac{1}{20\,\frac{9}{20\,\frac{25}{20+}}}$
$1\,\frac{1}{2\,\frac{9}{2\,\frac{25}{2+}}}$	$3\,\frac{1}{6\,\frac{9}{6\,\frac{25}{6+}}}$	$5\,\frac{1}{10\,\frac{9}{10\,\frac{25}{10+}}}$	$7\,\frac{1}{14\,\frac{9}{14\,\frac{25}{14+}}}$	$9\,\frac{1}{18\,\frac{9}{18\,\frac{25}{18+}}}$	$11\,\frac{1}{22\,\frac{9}{22\,\frac{25}{22+}}}$
$4 = Q2$	$16 = Q4$	$36 = Q6$	$64 = Q8$	$100 = Q10$	

Factores autem illi sic constituti, quantumlibet continuati, (modo ne in infinitum,) rectangulum facient debito quadrato vel minus, si numerus fractionum integro adjunctarum sit par; vel majus si impar; ita tamen ut quo longius procedatur eo propius ad quadratum debitum accedat. Quod hac demonstratione confirmatur.

Esto, ex debitis factoribus quibusvis, prioris numerus integer F, adeoq; posterioris $F + 2$; numerus igitur interjectus (quod latus est quadrati) $F + 1$. Eorum rectangulum $Fq + 2F$ minus est quam hujus quadratum $Fq + 2F + 1$.

Jam adjungatur utriq; factori fractio una; factores igitur $F\frac{1}{2F}$, $F + 2 + \frac{1}{2F + 4}$, constituent rectangulum

$$\frac{4Fqq + 16Fc + 20Fq + 8F + 9}{4Fq + 8F}$$, quod majus erit quam

qua-

quadratum $Fq+2F+1 = \frac{4Fqq+16Fc+20Fq+8F}{4Fq+8F}$.

Adjungantur deinde fractiones binæ; Fractiones emergentes $F\frac{1}{2F}\frac{0}{2F}$, $F+2+\frac{1}{2F+4+}\frac{9}{2F+4}$, constituent rectangulũ

$$\frac{4Fc+11F}{4Fq+9} \times \frac{4Fc+24Fq+59F+54}{4Fq+16F+25} =$$

$$\frac{16Fcc+96Fcq+280Fqq+480Fc+649Fq+561F}{16Fqq+64Fc+130Fq+144F+225}$$

quod minus est quam quadratum $Fq+2F+1 =$

$$\frac{16Fcc+96Fcq+280Fqq+480Fc+649Fq+504F+225}{16Fqq+64Fc+136Fq+144F+225}$$

Et sic quousq; procedatur, prodibit rectangulum quod erit nunc minus nunc majus (alternis vicibus) quam expositum quadratum, (quæ tamen differentia perpetuo minuitur, ut patet,) quod erat demonstrandum.

His autem sic inventis; poterunt illa ad series nostras ita accommodari, ut inde innotescant termini in tabella desiderati juxta hunc notationis modum designandi.

Exsempli gratia; Tabellæ nostræ series prima componitur, (ut supra ostensum est) in locis imparibus, ex continua multiplicatione. $A\times\frac{0}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}$ &c. vel $A\times\frac{0}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{8}{10}\times\frac{12}{14}$ &c. Et in locis paribus $1\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}$ &c. vel $1\times\frac{2}{4}\times\frac{6}{8}\times\frac{10}{12}\times\frac{14}{16}$ &c. Hoc est

0×2) Q0 ($\frac{0}{2}$ 4×6) Q4 ($\frac{4}{6}$ 8×10) Q8 ($\frac{8}{10}$

$$A\times\frac{-1\ \frac{1}{2}\ \frac{9}{2}}{0}\times\frac{+1\ \frac{1}{2}\ \frac{9}{24}}{2}\times\frac{3\ \frac{1}{6}\ \frac{9}{64}}{4}\times\frac{5\ \frac{1}{10}\ \frac{9}{104}}{6}\times\frac{7\ \frac{1}{14}\ \frac{9}{144}}{8}\times\frac{9\ \frac{1}{18}\ \frac{9}{184}}{10}\times\frac{11\ \frac{1}{22}\ \frac{9}{224}}{12}\times \&c.$$

2×4) Q2 ($\frac{2}{4}$ 6×8) Q6 ($\frac{6}{8}$ 10×12) Q10 ($\frac{10}{12}$

Vel etiam, (quod eodem plane recidit,) ad hanc formam,

A×

Q2) 0×2 ($\frac{0}{2}$ Q6) 4×6 ($\frac{4}{6}$ Q10) 8×10 ($\frac{8}{10}$

0 2 4 6 8 10 12

A × ——— × ——— × ——— × ——— × ——— × ——— × ——— × &c.

$1\ \frac{1}{2}\ \frac{9}{2^4}$ $3\ \frac{1}{6}\ \frac{9}{6^4}$ $5\ \frac{1}{10}\ \frac{9}{6^4}$ $7\ \frac{1}{14}\ \frac{9}{14^4}$ $9\ \frac{1}{18}\ \frac{9}{18^4}$ $11\ \frac{1}{22}\ \frac{9}{22^4}$ $13\ \frac{1}{26}\ \frac{9}{26^4}$

Q4) 2×4 ($\frac{2}{4}$ Q8) 6×8 ($\frac{6}{8}$ Q12) 10×12 ($\frac{10}{12}$

Utrovis modo, rationes quibus numeri vel paribus vel imparibus locis ponendi conſtituuntur, reſolvi poſſunt in binas (ut patet) quibus conſtituantur numeri locis continuis ponendi; numeris nempe locorum tum parium tum imparium in unam ſeriem interpolatione mutua redactis.

Similiter in ſerie tertia, cujus numeri in locis imparibus poſiti, conſtituuntur ex continue multiplicatis $A \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7}$ &c. vel $A \times \frac{4}{2} \times \frac{8}{6} \times \frac{12}{10} \times \frac{16}{14}$ &c. Et locis paribus $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{9}{8}$ &c. vel $1 \times \frac{6}{4} \times \frac{10}{8} \times \frac{14}{12} \times \frac{18}{16}$ &c. Hoc eſt

2×4) Q4 ($\frac{4}{2}$ 6×8) Q8 ($\frac{8}{6}$ 10×12) Q12 ($\frac{12}{10}$

$3\ \frac{1}{6}\ \frac{9}{6^4}$ $5\ \frac{1}{10}\ \frac{9}{10^4}$ $7\ \frac{1}{14}\ \frac{9}{14^4}$ $9\ \frac{1}{18}\ \frac{9}{18^4}$ $11\ \frac{1}{22}\ \frac{9}{22^4}$ $13\ \frac{1}{26}\ \frac{9}{26^4}$ $15\ \frac{1}{30}\ \frac{9}{30^4}$

A × ——— × ——— × ——— × ——— × ——— × ——— × ——— × &c.

2 4 6 8 10 12 14

4×6) Q6 ($\frac{6}{4}$ 8×10) Q10 ($\frac{10}{8}$ 12×14) Q14 ($\frac{14}{12}$

Atq; hæc quidem abunde ſufficiant ad omnes tabellæ noſtræ numeros complendos, cum jam ſupra oſtenſum ſit prop. 188. uno aliquo deſideratorum invento reliquos ſtatim innoteſcere. Si quis tamen cupiat, ut nos ſeriei primæ & tertiæ rationes reſolvimus, ita & reliquarum ſerierum rationes item reſolutas habere: poterit quidem & illud fieri, ita tamen ut in ſerie quarta (hoc eſt, poſt unitatum ſeriem ſecunda) erit rationum prodeuntium quælibet bimembris, in quinta trimembris, & ſic deinceps.

Nempe, in quarta, ad hanc formam

$$2\times4\times4\times6)\ Q:\ 4\times6:\ (\tfrac{6}{2}=\tfrac{3}{1} \qquad 6\times8\times8\times10)\ Q:\ 8\times10:\ (\tfrac{10}{6}=\tfrac{5}{3}$$

$$A\times\frac{3\frac{1}{6}\,\frac{9}{64}\times5\frac{1}{10}\,\frac{9}{124}}{2\times4}\times\frac{5\frac{1}{10}\,\frac{9}{104}\times7\frac{1}{14}\,\frac{9}{144}}{4\times6}\times\frac{7\frac{1}{14}\,\frac{9}{144}\times9\frac{1}{18}\,\frac{9}{184}}{6\times8}\times\frac{9\frac{1}{18}\,\frac{9}{184}\times11\frac{1}{22}\,\frac{9}{220}}{8\times10}\ \&c.$$

$$4\times6\times6\times8)\ Q:\ 6\times8:\ (\tfrac{8}{4}=\tfrac{2}{1}$$

In serie quinta, ad hanc formam.

$$2\times4\times6\times4\times6\times8)\ Q:\ 4\times6\times8:\ (\tfrac{8}{2}=\tfrac{4}{1}$$

$$A\times\frac{3\frac{1}{6}\,\frac{9}{64}\times5\frac{1}{10}\,\frac{9}{104}\times7\frac{1}{14}\,\frac{9}{144}}{2\times4\times6}\times\frac{5\frac{1}{10}\,\frac{9}{104}\times7\frac{1}{14}\,\frac{9}{144}\times9\frac{1}{18}\,\frac{9}{184}}{4\times6\times8}\ \&c.$$

$$4\times6\times8\times6\times8\times10)\ Q:\ 6\times8\times10:\ (\tfrac{10}{4}=\tfrac{5}{2}$$

Et similiter in sequentibus seriebus. Nempe singulæ rationes seriei quartæ, quintæ, sextæ &c. componuntur ex seriei tertiæ rationibus binis, ternis, quaternis, &c.

Cum autem in singulis his rationum jam inventarum seriebus (ex quarum continuo ductu constituuntur Tabellæ nostræ numeri) commodum videatur ut in variis formis exhiberi possint, & (prout opus videbitur) ab una in aliam transformari quo melius (aliarum fractionum instar) operationes arithmeticas suscipiant: Potest & id commode fieri per ea quæ in hujus Scholii initio tradita sunt. Nempe, resolutis (ut ibidem docetur) quadratis numerorum parium in rectangulorum illis æqualium latera illic indicata, notentur singula (ob commodiorem processum) suis symbolis, hoc modo,

Q2 | Q4 | Q6 | Q8 | Q10 | Q12 | Q14 | Q16								
□	B	C	D	E	F	G	H	I
$1\frac{1}{8}\frac{2}{64}$	$3\frac{1}{6}\frac{2}{64}$	$5\frac{1}{10}\frac{9}{104}$	$7\frac{1}{14}\frac{9}{144}$	$9\frac{1}{18}\frac{9}{184}$	$11\frac{1}{22}\frac{2}{224}$	$13\frac{1}{26}\frac{2}{264}$	$15\frac{1}{30}\frac{2}{304}$	$17\frac{1}{34}\frac{9}{344}$
		$\frac{4}{1}$ □	$\frac{9}{4}$ B	$\frac{16}{9}$ C	$\frac{25}{16}$ D	$\frac{36}{25}$ E	$\frac{49}{36}$ F	$\frac{64}{49}$ G
				$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}$ □	$\frac{9}{4}\times\frac{25}{16}$ B	$\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}$ C	$\frac{25}{16}\times\frac{49}{36}$ D	$\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$ E
						$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}$ □	$\frac{9}{4}\times\frac{25}{16}\times\frac{49}{36}$ B	$\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$ D
								$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$ □

Cum enim sit □B = Q2 = 4, & BC = Q4 = 16:
Erit 4 . 16 : : □B . BC : : □ . C = $\frac{16}{4}$□ = 4□;
Et $\frac{1}{4}$C = □. Item □)4(B, & B)4(□.

Et similiter in locis reliquis.

 Adeoq;

Adeoq; cum rationes nuper inventæ, ſint in ſerie

prima $A \times \frac{0}{1\frac{1}{2}\frac{9}{24}} \times \frac{2}{3\frac{1}{6}\frac{9}{64}} \times \frac{4}{5\frac{1}{10}\frac{9}{104}} \times \frac{6}{7\frac{1}{14}\frac{9}{144}} \times \frac{8}{9\frac{1}{18}\frac{9}{184}} \times \frac{10}{11\frac{1}{22}\frac{9}{224}} \times \frac{12}{13\frac{1}{26}\frac{2}{264}} \times$ &c.

hoc eſt $A \times \frac{0}{\square} \times \frac{2}{B} \times \frac{4}{C} \times \frac{6}{D} \times \frac{8}{E} \times \frac{10}{F} \times \frac{12}{G} \times$ &c.

ſecunda, $A \times \frac{2}{2} \times \frac{4}{4} \times \frac{6}{6} \times \frac{8}{8} \times \frac{10}{10} \times \frac{12}{12} \times$ &c.

tertia, $A \times \frac{B}{2} \times \frac{C}{4} \times \frac{D}{6} \times \frac{E}{8} \times \frac{F}{10} \times \frac{G}{12} \times \frac{H}{14} \times$ &c.

quarta, $A \times \frac{BC}{2\times4} \times \frac{CD}{4\times6} \times \frac{DE}{6\times8} \times \frac{EF}{8\times10} \times \frac{FG}{10\times12} \times \frac{GH}{12\times14} \times \frac{HI}{14\times16} \times$ &c.

quinta, $A \times \frac{BCD}{2\times4\times6} \times \frac{CDE}{4\times6\times8} \times \frac{DEF}{6\times8\times10} \times \frac{EFG}{8\times10\times12} \times \frac{FGH}{10\times12\times14} \times \frac{GHI}{12\times14\times16} \times$ &c.

Et ſic in cæteris: (ubi tamen intelligendum eſt A non eandem eſſe ubiq; quantitatem, ſed in ſerie prima $A = \infty$ vel potius $\infty\,\square$, in ſecunda $A = 1 = \infty\,\square \times \frac{0}{\square}$, in tertia $A = \frac{1}{2}\square = 1 \times \frac{2}{B}$, in quarta $A = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\square \times \frac{4}{C} = \frac{1}{2}\square \times \frac{1}{\square}$, in quinta $A = \frac{1}{3}\square = \frac{1}{2} \times \frac{6}{D} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}C = \frac{1}{2} \times \frac{4}{6}\square$. Et ſic deinceps. Nam ſeries prima erecta, eadem eſt cum prima transverſa; ut ſupra liquet.) Poſſunt illæ, per æquipollentiam modo demonſtratam, ſic exhiberi, ut non niſi uno aliquo numerorum horum interminabilium opus ſit in ſingulis exprimendis; & ſæpe quidem ne uno: Exempli gratia, In ſerie quinta, ratio ſecunda $\frac{CDE}{4\times6\times8} = \frac{36E}{4\times6\times8} = \frac{64C}{4\times6\times8} = \frac{4\square}{3} = \frac{16}{3B} = \frac{C}{3} = \frac{12}{D} = \frac{3E}{16}$ &c. Hæc igitur ratio, quolibet modorũ illorum deſignata, ducta in iſtius ſeriei terminũ ſecundũ 1, (in tabella noſtra repertum) habetur terminus tertius, $1 \times \frac{4\square}{3} = \frac{16}{3B} = \frac{C}{3} = \frac{12}{D} = \frac{3E}{16}$ &c.

Tertius autem hic terminus, ductus in rationem ſequentem $\frac{DEF}{6\times8\times10} = \frac{64F}{6\times8\times10} = \frac{100D}{6\times8\times10} = \frac{900B}{1920} = \frac{15}{8\square} = \frac{15B}{32} = \frac{15}{2C} = \frac{5D}{24} = \frac{40}{3E}$ &c. Exhibebit ejuſdem ſeriei terminum quartum $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, eundem nempe quem exhibet

exhibet Tabella.(Sed & idem terminus pariter exhibebitur ex ductu secundi termini 1, in rationem ex secunda & tertia compositam.) Atq; ad hunc modum licebit singulos tabellæ nostræ terminos indicare, adhibito nonnunquam uno quovis, sæpius autem ne uno quidem, numerorum istorum interminabilium; quorum quidem nos primum, hac nota $\square$ designatum, in tabella nostra adhibuimus.

Est igitur ratio circuli ad quadratum diametri, (per jam dicta)

$$\tfrac{1}{4} p d . d^2 :: 1 . \square = \frac{4}{B} = \frac{C}{4} = \frac{9}{D} = \frac{9E}{64} = \frac{225}{16F} = \frac{25G}{256}$$

&c. Et similiter (cum sit ratio perimetri ad diametrum quadrupla rationis circuli ad quadratum, quia nempe $\frac{1}{4} p d . d^2 : \frac{1}{4} p . d .$) ratio perimetri ad diametrum $p . d :: 4 . \square :$ & diametri ad perimetrum $d . p :: \square . 4 ::$

$$:: 1 . \frac{\square}{4} = B = \frac{16}{C} = \frac{4D}{9} = \frac{256}{9E} = \frac{64F}{225} \frac{1024}{25G} \text{ \&c.}$$

Nempe $\left\{ \begin{array}{l} \square : \text{sic Circulus ad Quadratum Diametri.} \\ B : \text{sic Circuli Diameter ad Perimetrum.} \end{array} \right.$ ut 1 ad

Superest, ut rationem ostendam cur in assignando valorem quantitatis $\square$, superius dixerim, pro fractionis continue fractæ denominatore ultimo (ubicunq, sistendum quis velit) ponendum esse, non 2, sed vel, 3, 5, 7, 9, &c. prout locus ubi consistitur postulaverit. (quod non tam necessitatis, quam perspicuitatis causa factum est.) Quæ quidem ratio, hæc est.

Cum supponatur (juxta jam tradita) $\square \times B = Q2 = 4.$ sitq; $\square = 1\frac{1}{2}\frac{9}{2+}$ & $B = 3\frac{1}{6}\frac{9}{6+}$. Adeoq; si numerum $4 = Q2$ dividamus per B (factorem posteriorem) prodibit $\square$. Si quantitas B imperfecte sumatur, non prodibit ipsa quantitas $\square$, sed alia quæ major sit vel minor, prout B imperfecte sumpta, sit ipsa B accurate, minor vel major. Nempe si pro divisore B sumatur 3, divisione facta, pro $\square$ prodibit $1\frac{1}{3}$: si pro divisore $3\frac{1}{6}$. prodibit $1\frac{1}{2}\frac{9}{5}$: si $3\frac{1}{6}\frac{9}{6}$; prodibit $1\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}$. Et sic deinceps: ut ex ipso calculo patebit.

Et sic in $B = 3\frac{1}{6+}$, $C = 5\frac{1}{10+}$, $D = 7\frac{1}{14+}$, &c. faciendum erit. Nempe in B, denominator ultimus erit unus ex his 5, 7, 9,

11, &c. (is nempe quem locus ubi sistitur postulaverit;) qui a 3 (numero integro unde quantitatis B designatio inchoatur) in progressione Arithmetica binario continue crescunt. Et similiter, in C, unus ex his 7, 9, 11, 13, &c: Et, in D, unus ex illis 9, 11, 13, 15, &c. (qui nempe illic a 5, hic a 7, in Arithmetica progressione continua, binario crescunt:) Et in sequentibus similiter: quod ipse calculus indicabit.

Adeoq; universaliter; in earum quantitatum qualibet designanda, (quocunq; tandem loco sistere libuerit,) pro denominatore ultimo sumendus erit numeri qui fractionum locum denominat duplus numero integro quæ designationem inchoat auctus.

Si quis autem quærat, cur in hoc processu (in denominatore ultimo designando) per factorem posteriorem potius quam priorem divisionem faciamus: Ratio est, quia sic res commodius procedit. Nam uti jam denominatores illi ab inchoante numero integro arithmetice procedunt crescendo; si per factorem priorem fieret divisio, denominatores illi ab inchoante numero integro retrocederent decrescendo, donec tandem perveniatur ad numeros negativos (qui designationem magis turbabunt) ut experimento facto patebit. Adeoq; ad illam legem, si (verbi gratia) designanda sit quantitas F, dividendo Q 10 = 100 per E, denominatores illi sic prodeuntes futuri sunt 9, 7, 5, 3, 1, − 1, &c. Si autem ad methodum priorem dividatur Q 12 = 144 per G, fuissent 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, &c, nempe a numero 11 illic decrescendo, hic crescendo: ubi autem hac methodo tota quantitas prodit justa major, illa prodibit etiam justâ major, & contra. Unde etiam patet, priorem illam methodum designandi ultimum denominatorem non modo minus turbatam, sed & magis accuratam esse, quam est posterior. Cum enim excessus & defectus sit semper penes ultimam fractionem (cujus nempe adjectione quantitas quæ prius erat justâ major fit justâ minor, aut contra,) ubi denominator est major (eodem manente numeratore) fractio minor est, adeoq; sive excessus sive defectus minor, quam si denominator ille fuisset major: adeoq; denominatorum illorum assumptio per continuum augmentum minuit, at quæ per continuum decrementum auget errorem. Quod quidem eousq; verum est, ut ne quidem illa nostra emendatio, quæ per continuum deno-

mina-

minatorum incrementum procedit, quicquam adfert commodi (sed incommodi potius ob dictam rationem,) donec eousq; procedatur ut denominator ille auctus major sit denominatore communi, (eo nempe qui æquatur duplo inchoantis numeri integri,) nam, donec eo perveniatur, mutatio illa communis denominatoris in denominatorem crescentem, non minuit, sed auget adjunctam illam fractionem, adeoq; & errorem.

Hoc unicum adhuc restare videtur; nempe ut ostendam qua lege Fractiones hujusmodi continue fractæ ad fractiones ordinarias commode reducantur.

Cum autem id fieri possit methodo nemini ignota, inchoando a fine, & recedendo donec ad principium tandem deveniatur: Optandum interim videtur, ut id fieri possit inchoando a principio & procedendo quousq; libet. Hoc igitur quî fieri possit jam sumus ostensuri.

Esto igitur fractio ejusmodi continue fracta quælibet, sic designata.

$$\frac{a}{\alpha}\ \frac{b}{\beta}\ \frac{c}{\gamma}\ \frac{d}{\delta}\ \frac{e}{\varepsilon}\ \&c.$$

Cum igitur constet, recepta methodo, reductionem institui posse ad hunc modum,

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{a}{\alpha}$$

$$\frac{a}{\alpha}\ \frac{b}{\beta} = \frac{a\beta}{b + \alpha\beta}$$

$$\frac{a}{\alpha}\ \frac{b}{\beta}\ \frac{c}{\gamma} = \frac{ac + a\beta\gamma}{\alpha c + b\gamma + \alpha\beta\gamma}$$

$$\frac{a}{\alpha}\ \frac{b}{\beta}\ \frac{c}{\gamma}\ \frac{d}{\delta} = \frac{a\beta d + ac\delta + a\beta\gamma\delta}{bd + \alpha\beta d + \alpha c\delta + b\gamma\delta + \alpha\beta\gamma\delta}$$

Et sic deinceps, quantum opus erit. Nos inde hanc colligimus regulam, cujus ope a principio reductionem inchoemur quousq; libet continuandam;

$$\left.\begin{array}{c} P \quad Q \quad P \quad Q \quad Q \\ \hline N3 \times \frac{N1}{D1} : + D3 \times \frac{N2}{D2} : = \frac{N3}{D3} \end{array}\right\}$$

Hoc

Hoc est; Si (trium continue sequentium fractionum) tam Numerator tertius propositus ducatur in Numeratorem primum jam jam quæsitum, quam Denominator tertius propositus in Numeratorem secundum jamjam quæsitum, aggregatum erit Numerator tertius quæsitus. Et similiter, si tam Numerator tertius propositus ducatur in Denominatorem primum jamjam quæsitum, quam Denominator tertius propositus in Denominatorem secundum jamjam quæsitum, aggregatum erit Denominator quæsitus.

Exemplo res fiet manifesta.

Sit fractio reducenda $\frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}\,\frac{49}{2}\,\frac{81}{11}$

Operatio sic instituetur. Inventa fractione secunda modo usitato; tertia & quæ deinceps sic reperientur.

$\frac{25}{2}$	$\times 1 = 25$ $\times 2 = 4$	29
$\frac{25}{2}$	$\times 2 = 50$ $\times 13 = 26$	76
$\frac{49}{2}$	$\times 2 = 58$ $\times 29 = 58$	156
$\frac{49}{2}$	$\times 13 = 637$ $\times 76 = 152$	789
$\frac{81}{11}$	$\times 29 = 2349$ $\times 156 = 1716$	4065
$\frac{81}{11}$	$\times 76 = 6156$ $\times 789 = 8679$	14835

P	Q
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{9}{2}$	$\frac{2}{13} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2}$
$\frac{25}{2}$	$\frac{29}{76} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}$
$\frac{49}{2}$	$\frac{156}{789} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}\,\frac{49}{2}$
$\frac{81}{11}$	$\frac{4065}{14835} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{35}{2}\,\frac{49}{2}\,\frac{81}{11}$

Et sic deinceps quousque opus erit. Ratio operationis ex jam dictis patet.

Siquis autem adhuc miretur, unde factum sit quod fractiones hæ continue fractæ, (prout hic vel illic cuiquam sistere placuerit) sint alternatim nunc majores nunc minores quantitate debita: hujus rei causam sic breviter accipiat. Cum certum

tum fit numerum integrum fine ulla adjuncta fractione justo minorē esse, fractio prima, huc integro adjuncta, quantitatem auget: sed eò minus auget quo ipsa minor fuerit. Hæc igitur prima fractio quantitatem auget, & quidem eousq; ut jam, quæ fuerat justa minor fiat justa major. Hujus autem fractionis, eodem manente numeratore, si denominator augeatur, (quod fit adjecta fractione secunda.) fractio prima, adeoq; & tota quantitas, adjectione secundæ minuitur. Hæc autem diminutio eò minor erit (adeoq; & tota quantitas major) quo ipsius secundæ fractionis (manente numeratore) denominator augetur; quod fit adjectione tertiæ fractionis. Tertia igitur fractio secundum minuit, adeoq; primam auget, ut & totam igitur quantitatem. Et similiter in sequentibus. Puta quartæ adjectio minuit tertiam, hoc est, auget, secundam, adeoq; minuit primam, totamq; quantitatem. Quinta minuit quartam, adeoq; auget tertiam, minuit secundam, augetq; primam totamq; quantitatem. Adeoq; fractionum adjectio in locis imparibus auget, in paribus minuit quantitatem: Quod non de his tantum, sed de quibusvis aliis fractionibus ita (quoad denominatores) continue fractis, intelligendum erit.

Atq; hactenus Nobilissimi Viri mentem, quantā potuī brevitate simul atq; perspicuitate exposui; quæq; de ipsius methodo dicenda habui breviter indicavi.

PROP. CXCII. *Theorema.*

SI sit æquabilis Curva (non hinc inde subsultans) VC, cujus Axis VX, & Tangens invertice VT; unde ductis ad curvam rectis axi parallelis, & ab invicem æqualibus distantiis remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, &c. (in locis paribus,) sint ut 1, 6, 30, 140, &c. (qui numeri fiunt ex continuā multiplicatione horum, $1 \times \frac{6}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{14}{3} \times \frac{18}{4}$, &c.) Erit, ut Secunda ad Tertiam (hoc est, ut 1 ad numerum ipsis 1, 6, interponendum,) sic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Sequitur ex Prop 189, et 135.

PROP. CXCIII. *Theorema.*

SI exponatur æquabilis curva VC, cui occurrat in vertice VT, unde ductis ad curvam quotlibet rectis parallelis & æqualiter ab invicem remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, Decima, &c. (in locis paribus,) sint ut $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}, \frac{945}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{9}{8}$ &c.) Erit ut Secunda ad Tertiam, (hoc est, ut 1 ad numerum ipsis $1, \frac{3}{2}$, interponendum,) sic Circulus ad Quadratum Diametri. (Ut autem Secunda ad Quintam, sic Triplum Circuli ad Quadruplum istius Quadrati, &c.)

Sequitur ex Prop. 118, 121, et 185.

PROP. CXCIV. *Theorema.*

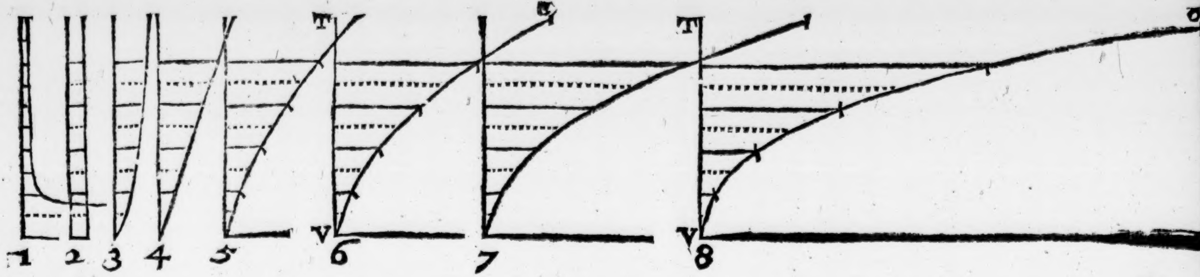
SI sit æquabilis curvæ VC, axis VX, tangens in vertice VT, unde rectæ ad curvam ductæ (axi parallelæ & æqualibus interstitiis dissitæ) secunda, quarta, sexta, octava, decima, &c (in locis paribus) sint ut $1, \frac{5}{2}, \frac{35}{8}, \frac{315}{48}, \frac{3465}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{4} \times \frac{9}{6} \times \frac{11}{8}$ &c.) Erit, ut secunda ad tertiam (hoc est, ut 1 ad numerum ipsis 1, $\frac{5}{2}$, interponendum;) sic circulus ad $\frac{4}{3}$ Quadrati circumscripti (sive quadrati ex diametro;) Sive Triplum circuli ad Quadruplum quadrati circumscripti. (Ut autem Secunda ad Quintam, sic Triplum circuli ad Octuplum istius Quadrati. &c.)

Patet ex præced. & Tabella prop. 189.

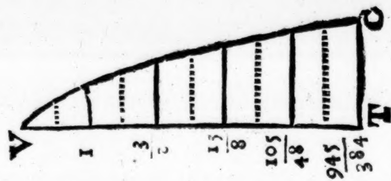
SCHOLIUM.

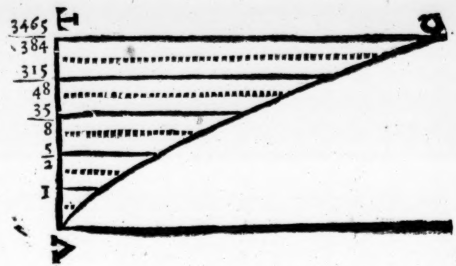
Et quidem hujusmodi aliæ propositiones innumeræ ex eadem Tabella (prop 189) deduci possunt: formatis scilicet aliis atq; aliis ejusmodi curvis juxta istius Tabellæ tenorem.

Quales autem futuræ sint istæ omnes curvæ non adeo facile erit judicare. Hoc interim de quibusdam observare licet. Nempe



630
140
30
6
T
V
X





Nempe; In ferie fexta, numeri (Triangulares) 1, 3, 6, 10, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{6}{2} \times \frac{8}{4} \times \frac{10}{6}$ &c) Sunt ut quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola; ut dictum eft prop. 173.

In ferie Quarta, numeri (arithmetice proportionales) 1, 2, 3, 4, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{4}{2} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{6}$ &c) funt ut quadrata ordinatim-applicatarum in Parabola: five ut rectæ in Triangulo: ut patet.

In ferie Secunda, numeri (æquales) 1, 1, 1, 1, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 \times \frac{2}{2} \times \frac{4}{4} \times \frac{6}{6}$ &c.) funt ut quadrata rectarum (vel etiam ipfæ rectæ) in Parallelogrammo. ut patet. Adeoq; in Secunda & Quarta ferie, pro curvis prodeunt revera rectæ, latus nempe illic Trianguli, hic Parallelogrammi.

In feriebus fexta, octava, decima, &c. (alternatim fumptis,) prodibunt curvæ magis adhuc compofitæ, fed quarum characteres non minus accurate defignantur in dicta tabella, quam Parabolæ, Hyperbolæ aut Ellipfeos characteres noti.

In reliquis autem feriebus interjectis, prima, tertia, quinta, &c, (in locis imparibus,) provenient item æquabiles curvæ & regulares (quales puta pro Geometricis agnofceret Cartefius,) quamvis earum characteres difficilius explicari poffint, ut qui expofitis ferierum, in locis paribus pofitarum, characteribus funt intermedii juxta illam quam exhibuimus progreffionis formam in prop. 187.

Qualiter autem ad afpectum fe præbent expofitæ curvæ, (tam quæ locis paribus quam quæ imparibus conveniant,) fingulis tabellæ feriebus indicatæ, oftendit appofita figura, quæ figillatim illas depictas exhibet, debitis fuis menfuris ex eâdem (ut loquuntur) *Scala* defumptis.

Notandum interim eft (quod & ipfe afpectus indicat,) quod convexitas curvæ VC (rectam VT verfus obverfa) quæ in curvarum ultima eft maxima, (fi retro computemus,) in anterioribus fenfim decrefcit; donec in loco quarto curva illa in rectam (fecantem) tranfeat (quæ inter convexam & concavam eft media,) deinde loco tertio in concavam, fecundo autem in parallelam, & in primo deniq; in recurvam, (quæ nempe ex iis partibus ad rectam continue appropinquat quibus reliquæ inde recedunt.) Item recta VT, quæ in quinta & fequentibus eft tangens

gens, in quarta rectam secat, in tertia fit curvæ diameter, in secunda fit parallela, & in prima deniq; Asymptota.

Quænam autem sint curvarum harum omnium affectiones, & quibus modis commodissime describantur, non libet mihi (fesso jam, varioq; & impedito itinere satis lassato) curiosius impræsentiarum inquirere; ut nec Hyperbolæ quadraturam ulterius (quam supra factum est) attingere. Et quidem fieri potest ut gratam nonnullis negotium vel ea tacendo præstiturus sim, quo liceat ipsis, indicata jam methodo, eisdem investigandis oblectari.

Eas autem omnes tales esse quales pro *Geometricis* haberi velit Cartesius, quo minus dubitem id facit, quod de locis paribus jam satis constet, detectis jamjam eorum characteribus; adeoq; & de locis imparibus (quamvis eorum characteres non ita commode designari possint) non aliter censendum est. Quales autem illæ sint Æquationes quæ singulis conveniant, ex ipso ordine patebit. Cum enim seriei quartæ conveniat æquatio Lateralis, sextæ Quadratica, octavæ Cubica, &c. (puta quarum suprema potestas est, Latus, quadratum, Cubus, &c;) ad series interjectas tales necesse est æquationes pertinere quæ sint his intermediæ; (puta, quintæ, talis quæ sit quadraticæ & laterali intermedia; & de cæteris pariter judicandum.) An autem ejusmodi Æquationes sat commode possint recepto more designari, dubitandum forsan erit.

Mihi interim sufficiat (nec quidem susceptorum laborum pænitet) rem hactenus perduxisse; novamq; ingresso semitam, eandem aliis aperuisse: quæ quidem quò me duceret, in principio non adeo facile erat hariolari, sed quæ ad curvilinearum (saltem quarundam) quadraturam, aliaq; ejusmodi abstrusiora problemata, recta tendere videbatur. Nec quidem spem fefellit. Utut enim in Circulo, ratio ea quam habet ille ad Quadratum (quam mihi præ oculis etiam ab initio fuisse non nego) non ita plane ex voto se prodat, ut in aliis aliquot curvilineis, recepto aliquo notationis modo explicanda, (sed per varios Mæandros me deduxerit, & tandem in ἄῤῥητον quiddam desinat) Operæ tamen pretium est eatenus eam indicasse quatenus ipsa numerorum natura patitur; ut nihil insuper reliquum sit quam ut inter Mathematicos conveniat quâ velint notatione (sive mea sive alia adhuc ad arbitrium excogitanda) rationem illam

ἄῤῥητον indicare. In aliis autem curvilineis non paucis ita ex voto successerunt omnia (& quidem supra spem non raro,) ut innumeras Curvilineorum quadraturas, partim antehac planè incognitas, partim etiam cognitas quidem antea, sed nova jam & faciliori methodo traditas, indicaverim: Aliaq; innumera ex intricatioribus Matheseos problematis, (puta de Pyramidoidibus, Conoidibus, & Sphæroidibus, de linea Spirali, & Spaciis ipsi adjacentibus, de Paraboloidibus, aliisq; passim,) vel primus detexerim, vel multum elucidaverim: Figuras item in infinitum continuatas (non unam aliquam, quod tamen a Toricellio factum, satis videbatur mirandum, sed varias) tam planas quam solidas, ad mensuram notam & finitam reduxerim.

Facile quidem fuisset (modo libuisset)innumeras passim propositiones alias inseruisse, (quod nemini harum rerum perito dubium esse potest.) cum sit ea quam trado doctrina consectariorum satis ferax. Et quidem in primoribus hujusce tractatus partibus copiosius hujusmodi consectaria interserui, ideo præsertim ut quo tenderet hæc doctrina indicarem. Verum in sequentibus illud parcius prosecutus sum, partim quòd jam ex præcedentibus eousq; pateret methodus nostra ejusq; utilitas ut jam suo Marte possit quilibet id ipse præstare, partim etiam ne propositionum numerus (qui jam turgere videbatur)adeoq; totius tractatûs moles nimis excresceret. Adeoq; multa passim in transitu leviter indicata sunt, quæ, si libuisset curiosius prosequi, integram potius disquisitionem sibi sigillatim postularent.

Quod reliquum est; orandi sunt harum rerum periti, ut quod nos præstare valuimus candide dignentur acceptare, & siquid ipsis rectius obtigit in publicum Matheseos augmentum impertiri.

LAUS DEO.

Index Propositionum.

FINIS.

ECLIPSIS
SOLARIS
OXONII VISÆ

Anno Æræ Christianæ 1654.

2° *Die Mensis Augusti,*

STILO VETERI,

OBSERVATIO.

Observatore

JOHANNE WALLISIO

Geometriæ Professore SAVILIANO.



OXONII,

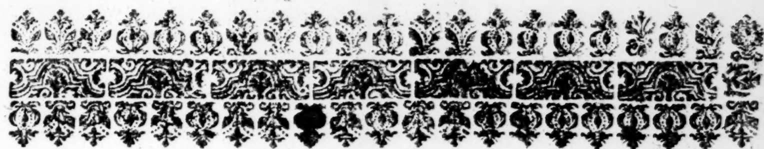
Typis *L. LICHFIELD* Academiæ Typographi,

Impensis *THO. ROBINSON*,

Anno Salutis 1655.







AMPLISSIMO VIRO

IOHANNI HEVELIO,

SENATORI DANTISCANO,

Matheseos peritissimo;

JOHANNES WALLISIUS

S.



ON illud agitur hisce literis (Vir Illustris) ut quanta Tua fuerit in rebus Mathematicis peritia, quanta industria, aut quantum etiam ipsa Mathesis sedulitati Tuæ debeat, literato Orbi innotescat. Quotusquisq; enim est qui illa nescit? Aut quidem, si nesciretur, quis ego sum (vix de nomine notus) ut ea mihi de Te prædicanti magna debeatur fides? Non patiuntur autem egregia illa quæ ex tuis exstant opera, non patitur nominis tui celebritas, nec Mathematicorum omnium in te conversi oculi patiuntur, ut HEVELII *nomen ab erudito*

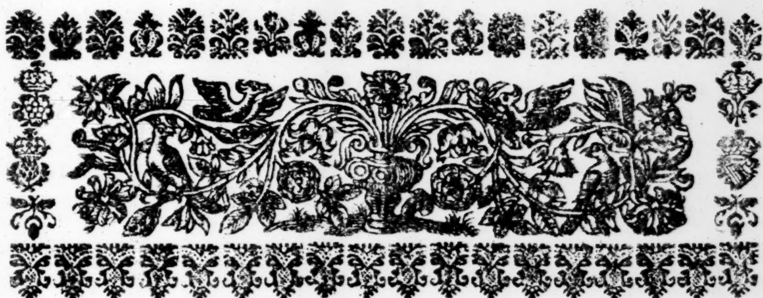
Orbe vel ignoretur, vel amplis laudibus undiq; non efferatur. Quisquis enim limatissimum illud opus Selenographicum, (ut cætera taceam,) quod Te authorem prædicat, inspexerit; & , quantâ curâ, quantis sumptibus, quantis vigiliis, quanto deniq; (ut uno verbo omnia complectar) Viro opus sit, ut egregium illud opus instruatur, satis perpenderit; non poterit ille non in admirationem rapi. Quis enim illum vel tacere poterit, vel satis eloqui, qui unus isthæc omnia peregerit! Ego equidem non satis mirari valeo, summum virum, tam rebus domesticis, quàm negotiis publicis, & obeundo magistratu, occupatissimum, eousq; cœlestibus observationibus vacare posse, eisq; tantâ cum sedulitate, tanto & temporis & facultatum & valetudinis etiam impendio, tam pertinaciter invigilare. Tanto enim apparatu, tanto molimine, tantis sumptibus, in conficiendis instrumentis, in vitris excolendis, aptisq; parandis observationi locis, in tot insuper Lunæ phasibus, aliisq; Cœli Phænomenis, accuratè notandis, delineandis, æriq; incidendis, opus esse nemo non fatebitur, ut ea non unum aliquem, licèt summum virum, sed sat multos potiùs viros egregios postulare videantur.

Cùm autem mihi contigerit, non modo Tuis quæ publicè exstant scriptis, sed & humanissimis ad me literis Tuis aliquoties frui; a gratitudinis officio neutiquam alienum duxi, quæ nobis nuper observare licuit tecum communicare. Quamvis enim hujusmodi conatus nostri, tanti non sint ut cum Tuis illos comparandos velim, (cùm neq; tantus mihi suppetat instrumentorum delectus, nec eam mihi vendicem, minùs exercitato, in observando ἀκρίβειαν.) attamen Tibi non ingratum fore facilè judico, quid ab

aliis

aliis observatum fuerit intelligere: præsertim cùm ea quæ a Lu*minarium* Eclipsibus *addisci solent, non tam ab una aliqua, utut accurata, uno in loco præstita observatione, quàm ex collatis variis, in variis Terræ locis peractis, innotescant. Ideóq; hanc nostram qualemqualem deficientis* Solis *Observationem* Oxonii *habitam, sive observantiæ, sive gratitudinis ergô,* Tuis *oculis subjicere visum est, simul cum ea qua usus sum observandi methodo.* Si*quid autem inde vel delectationis vel commodi perceperis, omnino mihi gratissimum erit aliquid præstitisse tanto viro non ingratum.* Superest, *ut a* Deo Opt. *Max. omnia* Tibi *felicia precatus,* Tuiq; *observantissimum me professus, Valere jubeam. Dabam* Oxonii, *ipsis Calendis Januariis, Anno* 1655.





Eclipſin Solarem, Oxonii Viſam,

Aug. 2. 1654. ſtil. Vet.

Obſervandi Methodus.

CUM Ephemeridum indicio moniti, Eclipſin Solarem ſatis quidem amplam ſecundo die Menſis Auguſti (ſtylo veteri) Anno Æræ Chriſtianæ vulgaris currente 1654, tempore matutino, conſpiciendam exſpectavimus: parabam ea quæ huic negotio neceſſaria videbantur, ut, ſi cœlo propitio frui datum fuerit, Eclipſis exſpectata commodè ſpectari poſſit. Cameram nempe curavi probè obſcurandam, ut meræ eſſent tenebræ; in quam per Teleſcopium ſatis limatum Solares radii intromiſſi in adverſâ tabulâ reciperentur, quam ita Teleſcopio accommodaveram, ut, ubi ad Solem illud directum fuerit, hæc ſemper Solari diſco maneat parallela: eodem ipſo inſtrumento uſus, quo ante biennium eodem in loco Eclipſin (quantum per cœlum nubilum tunc licuit) obſervaveram.

Huic tabellæ, ſive aſſerculo ligneo, chartam affixeram, quæ circulum continebat tantæ magnitudinis ut illum exactè impleret per Teleſcopium intromiſſa Solaris corporis effigies. Hunc circulum (duabus diametris decuſſatim poſitis diviſum, quarum altera lineam verticalem, altera Horizontalem oſtenderet,) ita dividebant alii circuli concentrici ut in quâlibet diametro digiti & digitorum quadrantes diſtinguebantur. Et perpendiculum etiam appenſum erat, cujus umbra moneret ſiquando linea verticalis a debito ſitu deflecteret.

Habui autem obſervationis comites duos egregios viros, Artium Magiſtros, & rerum Mathematicarum peritiſſimos, D. *Richardum Rawlinſon* Collegii Reginalis Socium, & D. *Chriſtophorum Wren* Socium Collegii Omnium-Animarum, quorum etiam alterius ope in ære incidendo uſus ſum.

Ubi dies advenerat, metuebam primo mane ne nubilum cœlum aſpectum Solis penitùs impediret. Sed nubes paulatim diſperſæ, ante Eclipſeos initium, cœlum ſudum oſtendebant, & negotio noſtro ſatis accommodum.

Ipſum Eclipſeos principium non obſervavi, quippe quod paulò citius contigit quàm exſpectaveram; ſed ex ſequentibus obſervationibus aliquammultis ſatis illud colligi poterit: incidiſſe nempe (apud nos) hor. 7. 45′. (circiter) tempore matutino: in limbi Solaris gradu 22° a puncto verticali Occidentem verſus.

Deinde verò phaſes umbræ creſcentes notavi ſex, prout illas habes in Typo delineatas; ut & decreſcentes quindecim.

Maximam verò Solis obſcurationem omnino non vidi, non tam injuriâ Cœli quàm loci ubi fueram impeditus. Camera enim ubi habita eſt obſervatio eum habuit ſitum ut non per unam aliquam feneſtram tota potuit Eclipſis obſervari; ſed principium quidem per unam, finis autem per aliam. Maxima autem omnium obſcuratio tum contigit cum inſtrumentum ab hac ad illam movendo fuimus occupati, dum neutra fene-

ſtra

ſtra ſatis erat commoda: Sol enim ab unâ digreſſus nondum ad alteram pervenerat. Quanta autem illa fuerit, ex reliquis phaſibus collatis ſatis colligitur. Erat nempe illa (juxta eam quam exhibemus obſervationem) decem integris digitis paulò minor. Incidit autem (apud nos) hora 8. 58′½. circiter, paulo ante obſervationem noſtram ſeptimam.

Ubi deniq; Eclipſis ad finem vergebat, curavimus tam momentum exitûs, quam punctum marginis Solaris quod ultimum umbram paſſum eſt ſatis curioſè obſervare. Incidit nempe (apud nos) horâ 10. 14′. (ante meridiem:) in limbi Solaris gradu 43°, a puncto infimo Orientem verſus. Duravit igitur Eclipſis per horas duas integras cum ſemiſſe, circiter.

Quem autem in ſingulis phaſibus ſitum habuerint lucis cornua, & quem Solaris limbi gradum tetigerint, in ipſo quem vides Typo expreſſum habes; ut non ſit opus multis illud verbis explicare. In omnibus autem illis quas notavimus phaſibus; conſenſus ipſe ſatis indicio eſſe videtur, totam obſervationem ſatis accuratè fuiſſe peractam, ſaltem errores ſi qui ſint non adeò magnos eſſe.

Diametrum Solis viſibilem deprehendimus in hac Eclipſi minorem eſſe quàm in eâ quæ accidit duobus abhinc annis, (Martii 29. 1652. ſt. vet.) quod eo ſtatim indicio patuit quòd idem circulus obſervatorius quem tunc adhibui nonniſi in remotiori a Perſpicillo diſtantiâ implebatur.

Diametrum Lunæ viſibilem, quamvis illam exhibeant Tabulæ Diametro Solari paulò majorem, invenimus potius æqualem eſſe, ab eâ ſaltem vix notabili quantitate differre. Quod hoc indicio deprehenſum eſt. Circulos habebam aliquot chartaceos antea paratos, diverſæ paulò ab invicem magnitudinis, circulo obſervatorio (qui diſcum Solarem exhibuit) partim majores partim minores aut æquales; quos ſigillatim umbræ in Solari diſco viſæ applicando illum inveni arcui lu-

 cem

cem ab umbra ſeparanti optimè convenire, qui circulo Obſervatorio congruebat.

Atq; hoc quidem circulo chartaceo uſus ſum in ſingulis phaſibus obſervandis. Cùm enim celerior motus umbræ non paſſus eſt notabilem moram in unâ aliquâ phaſi delineandâ; circulo chartaceo umbræ applicato, per ipſius ſtatim marginem arcus eos plumbo deſcripſimus quos in ipſo Typo vides expreſſos. Hoc enim pacto, & expeditioni meliùs proſpectum, & confuſioni cautum, iri judicavi, quam ſi ſingulos arcus ternis punctis indicatos circino tandem poſt obſervationem peractam delineandos reliquerim.

Cùm autem viſibilem Lunæ Diametrum reſpectu Diametri Solaris paulò minorem nobis apparuiſſe dictum eſt quàm indicabant Tabulæ: non tamen propterea Tabulas illas eo nomine ſuſpectas ſtatim inſinuo aut erroris incuſo; cum & ſalvâ Tabularum fide ſatis illud contingere poſſit. Corpus enim lucidum, dum radiis ſuis corpus opacum lambit, ipſius marginem ita perſtringere ſolitum eſt acſi nonnihil inde abraderet, & corpus opacum paulò minus apparere facit quàm revera eſt. Quod familiari inſtantiâ contueri licet. Si enim bacillum teres oculum inter & lucernam tranſverſim colloces, ut lucernæ flamma partim ſupra baculum partim ſubtùs conſpiciatur; videbitur rotundum illud bacillum eò loci ubi radiis perſtringitur aliquantò minus eſſe, quàm alibi ubi radiis flammulæ liberatur; quaſi utrinq; aliquid radiis perſtringentibus ablatum eſſet. Quod quidem de corpore Lunari ſi concedatur, Solem inter & oculum poſito; neceſſe eſt ut ipſius diſcus, radiis Solaribus quaſi deterſus, minor aliquantò appareat, quàm vel revera ſit, vel in alio ſitu videatur eſſe. Quod quidem animadvertiſſe, in Solaribus Eclipſibus æſtimandis, non levis erit momenti. Hinc enim eveniet ut Eclipſes Solares ſemper videantur paulò minores quàm Luminarium proportio & ſitus poſtulant. Et (eâdem

dem de causâ) Eclipses Lunares etiam justo minores apparere possunt, diminuto scilicet umbræ terrestris cono (abrasis quasi lumine Solari ipsius particulis exterioribus) unde necesse erit ut et minuatur Lunaris disci obscuratio. Quantum autem, in utrâq; Eclipsi, hanc ob causam deesse judicandum erit, accuratiori indagine non indignum videatur.

Temporis momenta quod attinet; ea indicio Horologii ambulatorii, singula minuta prima & secunda monstrantis, æstimavi; prout illa habes in adjunctâ Tabellâ indicata. Quamvis enim isthæc automata, utut artificiosè facta, non ita planè æquabili motu procedant ut Mathematicam ἀκρίβειαν attingant; si tamen minuto forsan integro (vel etiam altero) aliquando peccatum fuerit, non eapropter eorum usus esset contemnendus. Sed & altitudinem Centri Solaris aliquoties interim æneo Quadrante observavi, non quidem adeò magno, sed accuratè diviso & fideliter etiam tractato. Ex quibus comparatis liquet, Horologium, in principio Eclipseos, potius sequi justum tempus, sed properanter; in fine verò, præire, sed & segnescere.

Plura temporis mensurandi media non adhibui, partim quòd ad manum alia non erant, partim etiam quòd non totidem adjutores habui, illarum rerum peritos, quot pluribus attenti esse possent.

Totâ Observationis serie sic peractâ: cùm tandem esset ære incidenda, non ullâ placuit emendatione uti, ne correctionis prætextu depravare videar: sed observationem integram, sicut in protographo primitùs depicta fuerat, fideliter in æneam laminam transferre. Schematis tamen totius situm inversum, ex radiorum decussatione ortum, in integrum restituendum duxi; (quod solâ chartæ conversione præstitum est,) quò meliùs apparentiæ cœlesti congrueret. Totum etiam in minorem aliquantò formam redigere coactus sum; quia circulus

culus, quo usus eram, Observatorius aliquantò major fuerat quàm ut unâ paginâ commodè contineri possit.

Centri deniq; Lunaris transitum, per discum Solis, depictum habes; quatenus ex observatorum arcuum centris colligitur. Quæ quamvis linea sit non ita planè æquabilis, quin aliquantulum hinc inde fluctuet; tantillum tamen aberratum est, ut vix majorem ἀκρίβειαν sperare ausus essem; cùm in accuratissimis quas videre contigit Observationibus, non minorem deprehendi centrorum divaricationem, nonnunquam etiam & longè ampliorem; quod & quivis alius deprehendere poterit, cui libet in aliorum Observationibus arcuum observatorum centra examinare. Neq; mirum illud illis videbitur qui rebus hujusmodi sunt exercitati. Nôrunt enim levissimam in observandis umbræ arcubus (præcipuè minoribus) aberrationem, satis notabilem nonnunquam centri divaricationem creare posse; præsertim si accedat vel leviuscula instrumenti titubatio, vel perpendiculi a suo situ deflexio: quidquod & ipsum lucis & umbræ confinium non adeò accuratè, quasi lineâ Mathematicâ, determinare datum est, quin aliqua latitudo concedatur sit necesse non nisi conjectantis oculi æstimatione determinanda. Ne autem sit linea planè recta, impedire debent mutata subinde in singulis momentis tam Luminarium Parallaxes quàm Solaris Disci puncta Verticalia.

Tandem præcipuas aliquot phases seorsim placuit in minori formâ describere: non quidem eas ipsas quas in Observationis curriculo notavimus, sed quæ integris potius diametri Solaris digitis respondeant, prout eas ex majori Schemate colligere licuit.

Quis autem fuerit Zodiaci situs in singulis observatis phasibus, nec erat necesse, nec quidem conveniens adnotare; adeóq; nec nodi Ecliptici positionem. Cùm enim Zodiaci ad Horizontem inclinatio non eadem permaneat, sed in singu-

lis

lis subinde momentis immutetur; opus esset Zodiacum vel non omnino notare, vel toties quot sunt ipsæ observatæ phases, unde linearum confusio nimia oriatur sit necesse. Nec tamen eapropter placuit observationis Typum primarium (quem nempe tempore Observationis descripsimus) immutare, ut omnes observatæ phases ad unum aliquod perpendiculum reducantur, cujus respectu Zodiacus in eodem semper persistat situ. Sed mallem rem ipsam simpliciter ut facta fuerat exhibere, et ejusmodi calculum seu restitutionem cujusvis arbitrio permittere.

Atq; hæc sunt quæ de præsenti Observatione monenda duxi. Reliqua ex ipsa Typi, qui sequitur, inspectione satis patebunt.



Observatio



Observatio Eclipseos Solaris OXONII Habita;

Anno Æræ Christianæ 1654. *Die* 2 *Augusti st. vet.*
Elevatio Poli 51°, 46′ *circiter.*

Phasium observatarum ordo.		Digiti Ecliptici.	Tempus secundum Horologiũ ambulatorium. Hor.	′	″	Altitudines centri Solaris Gr:	Mi:	Tempus ex altitudine Solis erutum Hor:	I.	II.
Crescentes	1	* $2\frac{1}{2}$ D.	8	2	20.					
	2	4 circ.	8.	9.	30.					
	3	5 circ.	8.	15.	23.					
			8.	22.	0.	33.	34.	8.	23.	7.
	4	$6\frac{2}{4}$	8.	28.	29.					
	5	$7\frac{2}{4}$	8.	34.	24.					
	6	$8\frac{1}{2}$	8.	39.	31.					
Decrescentes	7	$9\frac{7}{8}$	8.	59.	42.					
	8	$9\frac{2}{3}$	9.	4.	50.					
	9	$9\frac{3}{8}$	9.	8.	34.					
	10	$8\frac{7}{8}$	9.	12.	45.					
			9.	15.	15.	40.	34.	9.	13.	31.
	11	$8\frac{1}{4}$	9.	17.	29.					
	12	$7\frac{1}{2}$	9.	23.	54.					
	13	$6\frac{3}{4}$	9.	28.	37.					
	14	$6\frac{1}{8}$	9.	33.	18.					
	15	$5\frac{1}{2}$	9.	37.	7.					
			9.	42.	30.	43.	45.	9.	38.	53.
	16	$3\frac{3}{8}$	9.	53.	17.					
	17	3 circ.	9.	56.	24.					
	18	$2\frac{1}{3}$	9.	59.	14.					
	19	$1\frac{7}{8}$	10.	2.	57.					
	20	$1\frac{3}{8}$	10.	6.	15.					
	21	$1\frac{1}{8}$	10.	7.	50.					
	22	Finis.	10.	14.	0.					
			10.	20.	35.	47.	57.	10.	17.	31.

* *Paulo major quam in Typo.*

Speciales aliquot Phases ad analogiam Schematis Universalis.

Crescentes.

	Hor:	Min:
Initium.	7.	45.
1 Dig.	7.	51.
2 Dig.	7.	57.
3 Dig.	8.	3½.
4 Dig.	8.	10.
5 Dig.	8.	16½.
6 Dig.	8.	23.
7 Dig.	8.	29½.
8 Dig.	8.	36½.
9 Dig.	8.	45.
10 Fere.	8.	58.

Decrescentes.

	Hor:	Min:
9 Dig.	9.	11.
8 Dig.	9.	19½.
7 Dig.	9.	26½.
6 Dig.	9.	34.
5 Dig.	9.	41.
4 Dig.	9.	48.
3 Dig.	9.	55.
2 Dig.	10.	1½.
1 Dig.	10.	8.
Finis.	10.	14.

FINIS.

